一阶逻辑语言独立性证明

张朝凯

中山大学南方学院　广州广东

【摘要】独立性是公理系统的重要性质之一。本文给出一阶逻辑的一个公理系统独立性的证明，其中大量运用了归纳原理和字符串规则，归纳原理包括数学归纳法和逻辑语言归纳原理等，字符串规则包括自由出现定义，替换定义以及无冲突地替换定义等，并从语法和语义方面分析了每条公理模式和规则的特征。本文突出的数学思想方法同样值得研究探讨。

【关键词】数理逻辑；一阶逻辑；公理；独立性

【收稿日期】2023 年 7 月 21 日　【出刊日期】2023 年 9 月 15 日　【DOI】10.12208/j.aam.20230016

First order logical language independence proof

Chaokai Zhang

Nanfang College of Sun Yat-sen University, Guangzhou, Guangdong

【**Abstract**】Independence is one of the important properties of axiom systems. This paper gives a proof of the independence of an axiom system in first-order logic, in which inductive principles and string rules are extensively used. Inductive principles include mathematical induction and logical language induction principles, and string rules include free occurrence definition, replacement definition and non-conflict replacement definition, etc. The characteristics of each axiom pattern and rule are analyzed from syntax and semantics. The mathematical thoughts and methods highlighted in this paper are also worth studying and discussing.

【**Keywords**】Mathematical logic; First-order logic; Axiom; independence

1 引言

如果一个公理系统中除去任何一条基本公理模式或规则会使这个公理系统的定理减少，那么就称这个公理系统具有独立性。独立性对公理系统来说，虽然只是一种锦上添花的要求，但是历史告诉我们，对其探讨研究具有深远的意义。

本文引用《数理逻辑：证明及其限度》[1]及 *A Mathematical Introduction to Logic Second Edition*[2]中所采用的一阶逻辑公理系统，这两本书中只给出了其可靠性和完全性的证明，并未对其独立性做出详细讨论。下面给出这个公理系统关于独立性的详细证明，其中对公理模式 1.1，公理模式 1.2 和公理模式 1.3 独立性的证明参考了文献《关于命题演算公理系统独立性证明的注记》[3]，对公理模式 3 独立性的证明参考了文献《一个一阶逻辑公理系统独立性的证明》[4]。

2 术语

公理模式：指出特定的公理集。

表达式变量：代表任意符号能指代的内容，默认使用不带下标的符号表示。

表达式常量：代表具体的内容，默认使用带下标的符号表示。

表达式序列：表达式序列的元素是表达式常量且互不相同。

3 公理系统

一阶逻辑语言的一个公理系统 FSA（取名来源于 *First-order logical axiom system A* 的英文缩写）如下，其中 Ax1.1-Ax6 为基本公理模式，RN，MP 为规则：

Ax1.1：$\alpha \to \beta \to \alpha$。
Ax1.2：$(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$。
Ax1.3：$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\beta \to \alpha) \to \beta$。
Ax2：$\forall x\phi \to \phi_t^x$，其中$t$在$\varphi$中可以无冲突地替换$x$。
Ax3：$\forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$。
Ax4：$\phi \to \forall x\phi$，其中x不在ϕ中自由出现。
Ax5：$x \approx x$。
Ax6：$x \approx y \to \phi \to \phi'$，其中$\phi$为原子公式，$\phi'$为若干个$x$替换为$y$的$\phi$。
RN：ϕ为公理$\Longrightarrow \forall x\phi$为公理。
MP：$(\Gamma \vdash \alpha$且$\Gamma \vdash \alpha \to \beta) \Longrightarrow \Gamma \vdash \beta$。

4 独立性证明

定理 4.1 公理系统 FSA 在所有包含等词符号和谓词符号的一阶语言中具有独立性。

证明 公理系统 FSA 在任意包含等词符号和谓词符号的一阶语言$\mathcal{L}$中，

（1）证明 Ax1.1 具有独立性。

对于任意公式ϕ，如下定义特征函数$F(\phi)$:

（a）当ϕ形如原子公式时，$F(\phi) = 0$。

（b）当ϕ形如$\neg\psi$时，$F(\phi) = F_\neg(\psi)$。

（c）当ϕ形如$\psi \to \omega$时，$F(\phi) = F_\to\left(F(\psi)，F(\omega)\right)$。

（d）当ϕ形如$\forall x\psi$时，$F(\phi) = F_\forall\big(F(\psi)\big)$。

其中$F_\neg$，$F_\to$，$F_\forall$定义如下：

p	$F_\neg(p)$	$F_\forall(p)$
0	1	0
1	0	1
2	0	2

$F_\to(p,q)$　q / p	0	1	2
0	0	2	2
1	0	0	2
2	0	0	0

1）证明 FSA 中除了 Ax1.1，由其他基本公理模式和规则推演出来的任意定理ϕ具有性质P：$F(\phi) = 0$。

（a）证明除了 Ax1.1，由其他基本公理模式推演出来的任意公理ϕ_{Axe}具有性质P。

由F定义得：$F(\phi_{Axe}) = 0$。

（b）证明除了 Ax1.1，由其他基本公理模式和 RN 推演出来的任意公理ϕ_{Ax}具有性质P。

A.当ϕ_{Ax}形如除了$\phi_{Ax1.1}$，其他任意基本公理ϕ_{Axe}时，
$F(\phi_{Axe}) = 0$，即ϕ_{Axe}具有性质P。

B.当ϕ_{Ax}形如$\forall x\phi_{Axn}$时，
由归纳假设得：ϕ_{Axn}具有性质P，即$F(\phi_{Axn}) = 0$，
则$F(\forall x\phi_{Axn}) = F_\forall\big(F(\phi_{Axn})\big) = F_\forall(0) = 0$，
所以$\forall x\phi_{Axn}$具有性质P。

归纳证明可得：除了 Ax1.1，由其他基本公理模式和 RN 推演出来的任意公理ϕ_{Ax}具有性质P。

（c）证明除了 Ax1.1，由其他基本公理模式和规则推演出来的任意定理ϕ具有性质P。

令$\langle\phi_1，\cdots，\phi_n\rangle$为$\phi$推演序列，
归纳证明当正整数$m \le n$时，ϕ_m具有性质P。

A.当$m = 1$时，
ϕ_1为公理，
所以$F(\phi_1) = 0$，即ϕ_1具有性质P。

B.当$m > 1$时，令$m = l = a$，
当ϕ_a为公理时，$F(\phi_a) = 0$。

当ϕ_a为ϕ_b和ϕ_c经过 MP 所得，其中b，$c < a$，$\phi_c = \phi_b \rightarrow \phi_a$时，
由强归纳假设得：对任意正整数$k < l$，ϕ_k具有性质P，
则$F(\phi_b) = 0$且$F(\phi_c) = 0$，
$F(\phi_b \rightarrow \phi_a) = 0$，
又由F定义得：$F(\phi_a) = 0$。
所以ϕ_a具有性质P。即ϕ_l具有性质P。
归纳证明可得：当正整数$m \leq n$时，ϕ_m具有性质P。
所以ϕ_n具有性质P，即ϕ具有性质P。
但存在 Ax1.1 中公理$\phi_0 = \neg A_1 \rightarrow A_1 \rightarrow \neg A_1$，$F(\phi_0) \neq 0$，即$\phi_0$不具有性质$P$，
所以 FSA 中除去 Ax1.1 无法推演出ϕ_0，但ϕ_0是 FSA 的定理，
所以 FSA 中除去 Ax1.1 会使定理减少，即 Ax1.1 具有独立性。
（2）证明 Ax1.2 具有独立性。
对于任意公式ϕ，如下定义特征函数$F(\phi)$：
（a）当ϕ形如原子公式时，$F(\phi) = 0$。
（b）当ϕ形如$\neg\psi$时，$F(\phi) = F_{\neg}(\psi)$。
（c）当ϕ形如$\psi \rightarrow \omega$时，$F(\phi) = F_{\rightarrow}\big(F(\psi)，F(\omega)\big)$。
（d）当ϕ形如$\forall x\psi$时，$F(\phi) = F_{\forall}\big(F(\psi)\big)$。
其中$F_{\neg}$，$F_{\rightarrow}$，$F_{\forall}$定义如下：

p	$F_{\neg}(p)$	$F_{\forall}(p)$
0	1	0
1	0	2
2	1	2

$F_{\rightarrow}(p，q)$　q \ p	0	1	2
0	0	2	1
1	0	2	0
2	0	0	0

1) 证明 FSA 中除了 Ax1.2，由其他基本公理模式和规则推演出来的任意定理ϕ具有性质P：$F(\phi) = 0$。
证明留给读者。【提示：思路参考（1）的证明。】
但存在 Ax1.2 中公理$\phi_0 = (A_1 \rightarrow A_1 \rightarrow \neg A_1) \rightarrow (A_1 \rightarrow A_1) \rightarrow (A_1 \rightarrow \neg A_1)$，$F(\phi_0) \neq 0$，即$\phi_0$不具有性质$P$，所以 FSA 中除去 Ax1.2 无法推演出$\phi_0$，但$\phi_0$是 FSA 的定理，所以 FSA 中除去 Ax1.2 会使定理减少，即 Ax1.2 具有独立性。
（3）证明 Ax1.3 具有独立性。
对于任意公式ϕ，如下定义特征函数$F(\phi)$：
（a）当ϕ形如原子公式时，$F(\phi) = 0$。
（b）当ϕ形如$\neg\psi$时，$F(\phi) = F_{\neg}(\psi)$。
（c）当ϕ形如$\psi \rightarrow \omega$时，$F(\phi) = F_{\rightarrow}\big(F(\psi)，F(\omega)\big)$。
（d）当ϕ形如$\forall x\psi$时，$F(\phi) = F_{\forall}\big(F(\psi)\big)$。
其中$F_{\neg}$，$F_{\rightarrow}$，$F_{\forall}$定义如下：

p	$F_{\neg}(p)$	$F_{\forall}(p)$
0	1	0
1	2	1
2	0	2

$F_{\rightarrow}(p，q)$　q \ p	0	1	2
0	0	1	2
1	0	0	2
2	0	0	0

1）证明 FSA 中除了 Ax1.3，由其他基本公理模式和规则推演出来的任意定理ϕ具有性质P：$F(\phi)=0$。
证明留给读者。【提示：思路参考（1）的证明。】
但存在 Ax1.3 中公理$\phi_0=(\neg\neg A_1\to\neg A_1)\to(\neg\neg A_1\to A_1)\to\neg A_1$，$F(\phi_0)\neq 0$，即$\phi_0$不具有性质$P$，
所以 FSA 中除去 Ax1.3 无法推演出ϕ_0，但ϕ_0是 FSA 的定理，
所以 FSA 中除去 Ax1.3 会使定理减少，即 Ax1.3 具有独立性。
（4）证明 Ax2 具有独立性。
对于任意公式ϕ，如下定义特征函数$F(\phi)$：
（a）当ϕ形如原子公式时，$F(\phi)=0$。
（b）当ϕ形如$\neg\psi$时，$F(\phi)=F_{\neg}(\psi)$。
（c）当ϕ形如$\psi\to\omega$时，$F(\phi)=F_{\to}\big(F(\psi)，F(\omega)\big)$。
（d）当ϕ形如$\forall x\psi$时，$F(\phi)=F_{\forall}\big(F(\psi)\big)$。
其中$F_{\neg}$，$F_{\to}$，$F_{\forall}$定义如下：

p	$F_{\neg}(p)$	$F_{\forall}(p)$
0	1	0
1	0	0

$F_{\to}(p，q)$ 　q / p	0	1
0	0	1
1	0	0

1）证明 FSA 中除了 Ax2，由其他基本公理模式和规则推演出来的任意定理ϕ具有性质P：$F(\phi)=0$。
证明留给读者。【提示：思路参考（1）的证明。】
但存在 Ax2 中公理$\phi_0=\forall v_1\neg A_1\to\neg A_1$，$F(\phi_0)\neq 0$，即$\phi_0$不具有性质$P$，
所以 FSA 中除去 Ax2 无法推演出ϕ_0，但ϕ_0是 FSA 的定理，
所以 FSA 中除去 Ax2 会使定理减少，即 Ax2 具有独立性。
（5）证明 Ax3 具有独立性。
对于任意公式ϕ，如下定义ϕ^*：
（a）当ϕ形如原子公式时，$\phi^*=\phi$。
（b）当ϕ形如$\neg\psi$时，$\phi^*=\neg\psi^*$。
（c）当ϕ形如$\psi\to\omega$时，$\phi^*=\psi^*\to\omega^*$。
（d）当ϕ形如$\forall x\psi$时，

$$\phi^*=\begin{cases}\forall x\neg x\approx x， & \text{当}\to\text{不在}\psi\text{中出现}\\ & \text{且}\neg\text{在}\psi\text{中出现}\\ & \text{且}x\text{在}\psi\text{中自由出现时，}\\ \forall x\psi^*， & \text{其他情况。}\end{cases}$$

1）证明当x不在ϕ中自由出现时，$\phi^x_t=\phi$。
证明留给读者。【提示：利用归纳法即可证明。】
2）证明若x不在ϕ中自由出现，则x不在ϕ^*中自由出现。
证明留给读者。【提示：利用归纳法即可证明。】
3）证明当$x\neq y$时，若y在ϕ中自由出现，则y在ϕ^x_t中自由出现。
证明留给读者。【提示：利用归纳法即可证明。】
4）证明当y不在t中出现时，若y不在ϕ中自由出现，则y不在ϕ^x_t中自由出现。
证明留给读者。【提示：利用归纳法即可证明。】
5）证明若$\alpha=(\phi^x_t)^*$，其中t在ϕ中可以无冲突地替换x，则$\alpha=(\phi^*)^x_t$，其中t在ϕ^*中可以无冲突地替换x。

证明留给读者。【提示：结合 1）-4）的证明及归纳法即可证明，其中当ϕ形如$\forall y\psi$时，需要分x不在$\forall y\psi$中自由出现和x在$\forall y\psi$中自由出现两种情况讨论。】

6）证明 FSA 中除了 Ax3，由其他基本公理模式和规则推演出来的任意定理ϕ具有性质P：在$\mathcal{L}$上，有$\vDash\phi^*$。

证明留给读者。【提示：结合 *的定义及（1）的证明即可证明，其中ϕ_{Ax2}具有性质P的证明需要利用 5）的证明，ϕ_{Ax4}具有性质P的证明需要利用 2）的证明。】

但存在 Ax3 中公理

$\phi_0 = \forall v_1(v_1 \approx v_1 \to \neg\forall v_2 v_1 \approx v_2) \to \forall v_1 v_1 \approx v_1 \to \forall v_1 \neg\forall v_2 v_1 \approx v_2$，

${\phi_0}^* = \forall v_1(v_1 \approx v_1 \to \neg\forall v_2 v_1 \approx v_2) \to \forall v_1 v_1 \approx v_1 \to \forall v_1 \neg v_1 \approx v_1$，

对于$\mathcal{L}$上某个结构$\mathfrak{A}$，其中$|\mathfrak{A}| = \{0，1\}$，

对于$\mathfrak{A}$上某个赋值s，

$(\mathfrak{A}，s) \nvDash \forall v_1(v_1 \approx v_1 \to \neg\forall v_2 v_1 \approx v_2) \to \forall v_1 v_1 \approx v_1 \to \forall v_1 \neg v_1 \approx v_1$，即$(\mathfrak{A}，s) \nvDash {\phi_0}^*$，

所以$\nvDash {\phi_0}^*$，即ϕ_0不具有性质P，

所以 FSA 中除去 Ax3 无法推演出ϕ_0，但ϕ_0是 FSA 的定理，

所以 FSA 中除去 Ax3 会使定理减少，即 Ax3 具有独立性。

（6）证明 Ax4 具有独立性。

对于任意公式ϕ，如下定义ϕ^*：

（a）当ϕ形如原子公式时，

$$\phi^* = \begin{cases} Pv_1 \cdots v_1， & \text{当}\phi\text{形如}Pt_1 \cdots t_n\text{时，} \\ & \text{其中}n\text{为任意自然数，} \\ & t_1 - t_n\text{为项变量，} \\ v_1 \approx v_1， & \text{当}\phi\text{形如}t \approx s\text{时。} \end{cases}$$

（b）当ϕ形如$\neg\psi$时，$\phi^* = \neg\psi^*$。

（c）当ϕ形如$\psi \to \omega$时，$\phi^* = \psi^* \to \omega^*$。

（d）当ϕ形如$\forall x\psi$时，$\phi^* = \forall v_1 \psi^*$。

1）证明 FSA 中除了 Ax4，由其他基本公理模式和规则推演出来的任意定理ϕ具有性质P：在$\mathcal{L}$上，有$\vDash \phi^*$。

证明留给读者。【提示：思路参考（5）的证明。】

但存在 Ax4 中公理$\phi_0 = P_1 v_1 \cdots v_1 \to \forall v_2 P_1 v_1 \cdots v_1$，

${\phi_0}^* = P_1 v_1 \cdots v_1 \to \forall v_1 P_1 v_1 \cdots v_1$，

对于$\mathcal{L}$上某个结构$\mathfrak{A}$，其中$|\mathfrak{A}| = \{0，1\}$，$P^{\mathfrak{A}} = \{(0，\cdots，0)\}$，

对于$\mathfrak{A}$上某个赋值s，其中$s(v_1) = 0$，

$(\mathfrak{A}，s) \nvDash P_1 v_1 \cdots v_1 \to \forall v_1 P_1 v_1 \cdots v_1$，即$(\mathfrak{A}，s) \nvDash {\phi_0}^*$，

所以$\nvDash {\phi_0}^*$，即ϕ_0不具有性质P，

所以 FSA 中除去 Ax4 无法推演出ϕ_0，但ϕ_0是 FSA 的定理，

所以 FSA 中除去 Ax4 会使定理减少，即 Ax4 具有独立性。

（7）证明 Ax5 具有独立性。

对于任意公式ϕ，如下定义特征函数$F(\phi)$：

（a）当ϕ形如原子公式时，$F(\phi) = 1$。

（b）当ϕ形如$\neg\psi$时，$F(\phi) = F_\neg(\psi)$。

（c）当ϕ形如$\psi \to \omega$时，$F(\phi) = F_\to\big(F(\psi)，F(\omega)\big)$。

（d）当ϕ形如$\forall x\psi$时，$F(\phi) = F_\forall\big(F(\psi)\big)$。

其中$F_\neg$，$F_\to$，$F_\forall$定义如下：

p	$F_\neg(p)$	$F_\forall(p)$
0	1	0
1	0	1

$F_\to(p，q)$ (q / p)	0	1
0	0	1
1	0	0

1）证明 FSA 中除了 Ax5，由其他基本公理模式和规则推演出来的任意定理ϕ具有性质P：$F(\phi)=0$。
证明留给读者。【提示：思路参考（1）的证明。】
但存在 Ax5 中公理$\phi_0=v_1\approx v_1$，$F(\phi_0)\neq 0$，即ϕ_0不具有性质P，
所以 FSA 中除去 Ax5 无法推演出ϕ_0，但ϕ_0是 FSA 的定理，
所以 FSA 中除去 Ax5 会使定理减少，即 Ax5 具有独立性。
（8）证明 Ax6 具有独立性。
在一阶语言$\mathcal{L}$中添加二元谓词符号E得到一阶语言$\mathcal{L}^*$。
定义$\mathcal{L}^*$上一个结构$\mathfrak{A}$：
（a）论域：$|\mathfrak{A}|=\{0，1\}$。
（b）谓词符号：
对于谓词符号E，$E^{\mathfrak{A}}=\{(0，0)，(1，1)，(0，1)\}$，
对于其他任意谓词符号P，$P^{\mathfrak{A}}=\emptyset$。
（c）常数符号：对于任意常数符号c，$c^{\mathfrak{A}}=0$。
（d）函数符号：对于任意n元函数符号f，对于任意$a_i\in|\mathfrak{A}|$，其中正整数$i\leq n$，$f^{\mathfrak{A}}(a_1，\cdots，a_n)=0$。
1）证明 FSA 中除了 Ax6，由其他基本公理模式和规则推演出来的任意定理ϕ具有性质P：$\mathfrak{A}\vDash\phi^*$，其中ϕ^*是所有出现的等词符号都替换为E的ϕ。
证明留给读者。【提示：思路参考（5）的证明。】
但存在 FSA 中定理$\phi_0=v_1\approx v_2\to v_2\approx v_1$，${\phi_0}^*=v_1Ev_2\to v_2Ev_1$，
对于$\mathfrak{A}$上某个赋值s，其中$s(v_1)=0$，$s(v_2)=1$，
$(\mathfrak{A}，s)\nvDash v_1Ev_2\to v_2Ev_1$，即$(\mathfrak{A}，s)\nvDash{\phi_0}^*$，
所以$\mathfrak{A}\nvDash{\phi_0}^*$，即$\phi_0$不具有性质$P$，
所以 FSA 中除去 Ax6 无法推演出ϕ_0，但ϕ_0是 FSA 的定理，
所以 FSA 中除去 Ax6 会使定理减少，即 Ax6 具有独立性。
（9）证明 RN 具有独立性。
对于任意公式ϕ，如下定义特征函数$F(\phi)$：
（a）当ϕ形如原子公式时，$F(\phi)=0$。
（b）当ϕ形如$\neg\psi$时，$F(\phi)=F_\neg(\psi)$。
（c）当ϕ形如$\psi\to\omega$时，$F(\phi)=F_\to\left(F(\psi)，F(\omega)\right)$。
（d）当ϕ形如$\forall x\psi$时，

$$F(\phi)=\begin{cases}1， & \text{当}x\text{在}\psi\text{中自由出现时，}\\ F_\forall(F(\psi))， & \text{其他情况。}\end{cases}$$

其中$F_\neg$，$F_\to$，$F_\forall$定义如下：

p	$F_\neg(p)$	$F_\forall(p)$
0	1	0
1	0	1

$F_\to(p，q)$ q / p	0	1
0	0	1
1	0	0

1）证明 FSA 中除了 RN，由其他基本公理模式和规则推演出来的任意定理ϕ具有性质P：$F(\phi)=0$。
证明留给读者。【提示：思路参考（1）的证明。】
但存在 Ax5 中公理$v_1\approx v_1$经过 RN 得出的公理$\phi_0=\forall v_1v_1\approx v_1$，$F(\phi_0)\neq 0$，即$\phi_0$不具有性质$P$，
所以 FSA 中除去 RN 无法推演出ϕ_0，但ϕ_0是 FSA 的定理，
所以 FSA 中除去 RN 会使定理减少，即 RN 具有独立性。
（10）证明 MP 具有独立性。
对于任意公式ϕ，如下定义函数$N_i(\phi)$，其中i为表达式序列元素：
$N_i(\phi)$为ϕ中i的数量。

1）证明 FSA 中除了 MP，由其他基本公理模式和规则推演出来的任意定理ϕ具有性质P：$N_{\rightarrow}(\phi) \neq 1$或$N_{\forall}(\phi) \neq 0$。

证明留给读者。【提示：对公式联结词数量范围进行判断，并参考（1）的证明即可证明。】

但存在 FSA 中定理$\phi_0 = A_1 \rightarrow A_1$，$N_{\rightarrow}(\phi_0) = 1$且$N_{\forall}(\phi_0) = 0$，即$\phi_0$不具有性质$P$，

所以 FSA 中除去 MP 无法推演出ϕ_0，但ϕ_0是 FSA 的定理，

所以 FSA 中除去 MP 会使定理减少，即 MP 具有独立性。

参考文献

[1] 郝兆宽，杨睿之，杨跃. 数理逻辑:证明及其限度[M]. 复旦大学出版社, 2014.

[2] HerbertB.Enderton. A mathematical introduction to logic = 数理逻辑 / 2nd ed[M]. Posts & Telecom Press, 2006.

[3] 郭方芳,陈图云.关于命题演算公理系统独立性证明的注记[J]. 辽宁师范大学学报: 自然科学版, 1999, 22(3):4.

[4] 何自强. 一个一阶逻辑公理系统独立性的证明[J]. 北京航空航天大学学报, 1994.

[5] 郜 博,谭希丽,孙佩宇.综合法,分析法,反证法与数学归纳法在高等代数中的应用[J].教育进展, 2023, 13(6):6.

[6] 钱立卿.论希尔伯特公理化方法的哲学意义[J].哲学分析, 2022, 13(4):152-163.

[7] 程和祥樊毅.论 L 中演绎序列的两种搜索方法[J].贵州工程应用技术学院学报, 2021, 39(6):6.

[8] 梁飞,田中旭,杨新宇.一个真值函项偶然逻辑的希尔伯特演算系统[J].逻辑学研究, 2021, 14(3):13.

[9] 王海东.康托尔集合论的理论错误[J].数学学习与研究：教研版, 2021, 000(024):P.144-145.