

圆锥曲线中求定长问题及重构题型探究

——以 2025 年新高考 I 卷 18 题教学为例

钱笠群

扬州大学数学学院 江苏扬州

【摘要】圆锥曲线定长问题是高考解析几何压轴题的核心考查方向，其难点在于如何在复杂几何条件与繁复代数运算之间建立高效转换通道。本文以 2025 年新高考 I 卷 18 题为载体，首先展示原题的完整代数翻译过程，继而通过将定长条件一般化为参数 t 、将斜率倍数条件一般化为参数 q ，重构出更具普遍性的题型框架。在引申问题 (i) 中，本文分别运用坐标代数法、向量共线法与相似三角形几何法三种路径求解动点 R 坐标，对比发现向量法在运算简洁性与逻辑清晰度上最优。在引申问题 (ii) 中，推导得出点 P 的轨迹为以 $Q(0, -(2+qt-t)/2)$ 为圆心的圆，进而将 $|PM|$ 最大值问题转化为椭圆上点到圆心 Q 的最大距离与圆半径之和，最终给出含参表达式。研究表明，斜率倍数 q 通过约束 P 点位置间接影响 $|PM|$ 的最值，二者呈正相关趋势。本文提炼的“条件翻译分层法”和“动点来源追溯法”可为高三解析几何复习提供可操作的教学策略。

【关键词】圆锥曲线；高中数学；新高考；椭圆

【收稿日期】2026 年 7 月 4 日

【出刊日期】2026 年 8 月 1 日

【DOI】10.12208/j.aam.20260018

Exploration of fixed-length problems and reconstructed question types in conic sections: A teaching case of question 18 in the 2025 new college entrance examination volume I

Liqun Qian

School of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】Fixed-length problems of conic sections constitute a core examination focus of the final-challenge analytic-geometry questions in the college entrance examination. Their difficulty lies in building an efficient conversion channel between complex geometric conditions and cumbersome algebraic operations. Taking Question 18 of the 2025 New College Entrance Examination Volume I as the research carrier, this paper first demonstrates the complete algebraic translation process of the original problem. Then, by generalizing the fixed-length condition to parameter t and the slope-multiple condition to parameter q , a more universal question-type framework is reconstructed. In extended problem (i), three approaches, namely the coordinate algebra method, the vector collinearity method and the similar-triangle geometric method, are adopted to solve the coordinates of moving point R . Comparison reveals that the vector method achieves optimal performance in computational simplicity and logical clarity. In extended problem (ii), it is deduced that the trajectory of point P is a circle with the center $Q(0, -(2+qt-t)/2)$. Furthermore, the maximum-value problem of $|PM|$ is transformed into the sum of the maximum distance from a point on the ellipse to center Q and the radius of the circle, and the final parametric expression is obtained. The study shows that the slope multiple q indirectly affects the maximum and minimum values of $|PM|$ by restricting the position of point P , and there exists a positive correlation between them. The “hierarchical condition translation method” and “moving-point source tracing method” summarized in this paper provide practical teaching strategies for senior-three review of analytic geometry.

【Keywords】Conic sections; Senior high school mathematics; New college entrance examination; Ellipse

1 引言

近年新高考数学呈现出“反套路、重思维、强应用”的鲜明特征，命题立意从“知识立意”“能力立意”向“素养立意”转变。这难免引发教育者思考：教师要在原题基础上学会思考题目背后的本质，进行多角度解题探索及变式探究，帮助学生理解几何基本图形的实质^[1]。本文所称的“题型重构”是指在不改变原题核心几何结构的前提下，对条件中的数值系数进行参数化一般化处理，并保留主要考点分布，以考察结论对参数的依赖关系及不同解题路径的适用性。具体操作包括三个层面：其一，将定长 3 替换为参数 t ，将斜率倍数 3 替换为参数 q ，探究动点坐标与最值的解析表达式随参数变化的规律；其二，在同一几何结构下，对比代数坐标法、向量共线法和相似三角形法三种解题路径的计算效率与认知负荷差异；其三，将设问从“求具体坐标”拓展为“求含参表达式和存在性条件”，以深化学生对问题结构本质的理解。

2 问题提出

在近年高考与各地模拟题中，以“定点”、“定值”、“定长”和“动点”为探究目标的试题层出不穷，其解题思路不再是被动解题，而是要求答题者能主动探究。教学中若仅满足于“一题一解”，则容易陷入单调的机械训练，难以促进学生思维的提升。因此，有必要对这类问题进行题型结构与思维路径的“重构”，也就是要透过题目现象看到其中的本质。许多难题、新题都是熟悉的知识应用于不同的情境，重构题型就是将打破固有的解题思维，尝试一题多解，将知识点、题目与答题技巧串联成一个整体。例如，本文以 2025 年新高考 I 卷 18 题为例，重构“定值”、“定长”与几何关系的问题，进而引导学生选择最佳的解题策略。

3 试题呈现

该题以几何（椭圆）为情境，考查曲线与直线相交、弦长距离、代数运算以及椭圆与圆的几何证明，在解决此类问题的过程中，要求学生基于基础知识选择合适的解题策略，例如两点坐标距离公式的计算求解、两动点的位置关系等，同时也关注学生的计算能力和逻辑推理能力。

设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，下顶点为 A ，右顶点为 B ， $|AB| = \sqrt{10}$ 。

(1) 求椭圆的标准方程；

(2) 已知动点 P 不在 y 轴上，点 R 在射线 AP 上，且满足 $|AR| \cdot |AP| = 3$ ；

(i) 设 $P(m, n)$ ，求点 R 的坐标（用 m, n 表示）；

(ii) 设 O 为坐标原点， M 是椭圆上的动点，直线 OR 的斜率为直线 OP 的斜率的 3 倍，求 $|PM|$ 的最大值。

4 重构题型，多维探究

第一问利用椭圆的性质，离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 得出 c 与 a 的关系，再利用 A 、 B 两点距离坐标公式得出 a 与 b 的关系，最后根据 $a^2 = b^2 + c^2$ 求出 a 、 b 、 c ，最后椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 。

第二问，原题中定长取 3 是特例，将 3 改为一般参数 t 后， R 的坐标表达式是否仍能用类似方法推导？推导结果是否保持统一的解析形式？当 t 变化时，点 P 的轨迹和 $|PM|$ 的最大值是否随之改变？

引申 (i) 已知动点 P 不在 y 轴上，点 R 在射线 AP 上，且满足 $|AR| \cdot |AP| = t$ 。

解法 1（代数法）：设 $R(x_0, \frac{n+1}{m}x_0 - 1)$ ， $\sqrt{x_0^2 + (\frac{n+1}{m}x_0)^2} \cdot \sqrt{m^2 + (n+1)^2} = t$

$$[x_0^2 + (\frac{n+1}{m}x_0)^2] \cdot [m^2 + (n+1)^2] = t^2$$

$$\frac{m^2 + (n+1)^2}{m^2} x_0^2 = \frac{tm}{m^2 + (n-1)^2}$$

$$x_0 = \frac{tm}{m^2 + (n+1)^2}, \text{ 所以 } y_0 = \frac{-m^2 - n^2 + (t-2)n + t-1}{m^2 + (n+1)^2}$$

因此 R 点坐标 $(x_0, y_0) = \left(\frac{tm}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{-m^2 - n^2 + (t-2)n + t - 1}{m^2 + (n+1)^2} \right)$.

解法 2 (向量法): 设 $R(x_0, y_0)$, 由题意可知 A、P、R 三点共线, 根据平面向量共线定理与数乘关系, 设 $\overrightarrow{AR} = \lambda \overrightarrow{AP}$, $\lambda > 0$, 用坐标表示向量 $\overrightarrow{AR} = (x_0, y_0 + 1)$, $\overrightarrow{AP} = (m, n + 1)$, $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{m^2 + (n+1)^2}$, 将 $|\overrightarrow{AR}| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{AP}|$, 代入 $|\overrightarrow{AR}| \cdot |\overrightarrow{AP}| = t$, 可得 $|\lambda| \cdot |\overrightarrow{AP}|^2 = t$, 解得 $\lambda = \frac{t}{m^2 + (n+1)^2}$. 用坐标表示向量 $\overrightarrow{AR} = \lambda \overrightarrow{AP}$, $(x_0, y_0 + 1) = \frac{t}{m^2 + (n+1)^2} (m, n + 1) = \left(\frac{tm}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{t(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} \right)$, 因此 R 点坐标 $(x_0, y_0) = \left(\frac{tm}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{t(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} - 1 \right)$.

解法 3 (几何法): 见图 1, 通过作辅助线, R、P 向 x 轴作垂线与 A 点所在的水平线交于 E、F 两点, 且向 y 轴作垂线交于 G、H 两点.

利用相似三角形的性质可知 $\triangle AER \sim \triangle AFP$, $\frac{AE}{AF} = \frac{AR}{AP} = \frac{\frac{t}{AP}}{AP} = \frac{t}{|AP|^2} = \frac{t}{m^2 + (n+1)^2}$, $AE = \frac{t}{m^2 + (n+1)^2} \cdot |AF|$, 可以得到 AE 的长度就是 R 点横坐标, 所以 $x_0 = \frac{tm}{m^2 + (n+1)^2}$. 同理 $\triangle AGR \sim \triangle AHP$, $\frac{AG}{AH} = \frac{AR}{AP} = \frac{t}{|AP|^2} = \frac{t}{m^2 + (n+1)^2}$, $AG = \frac{t}{m^2 + (n+1)^2} \cdot AH = \frac{t(n+1)}{m^2 + (n+1)^2}$, 因此 R 点纵坐标为 $|AG| - |AO|$, 所以 $y_0 = \frac{t(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} - 1$, 因此 R 点坐标 $(x_0, y_0) = \left(\frac{tm}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{t(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} - 1 \right)$.

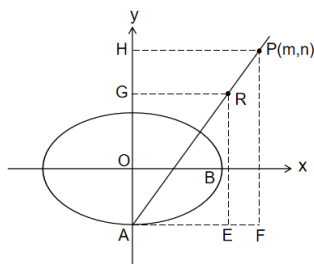


图 1

分析: 第一小问给了三种不同的解法, 分别从代数、向量、几何角度出发解答问题, 多维探究的过程能让答题者理解题目的本质是什么^[2]. 重构题型发现, R 的坐标与线段 AR 和线段 AP 长度的乘积有关系, 也就是说当 t 发生变化时, R 的坐标也随之发生变化, 这是因为 AR、AP 共线, 所以长度乘积直接决定伸缩比例 λ , 尽管 AR 与 AP 长度乘积不是一个定值, 只要三点共线, R 点坐标必然由 P 点坐标所决定.

引申 (ii) 设 O 为坐标原点, M 是椭圆上的动点, 直线 OR 的斜率为直线 OP 斜率的 q 倍, 求 $|PM|$ 的最大值.

见图 2, 可以发现这是双动点问题, 通过在空间中建系, 设双动点坐标参数, 转化为二次函数, 利用三角形两边之和大于第三边, 判断当三点共线时取得最大值, 这也是本题的万能解法, 虽然计算量大但思路固定容易想到^[3].

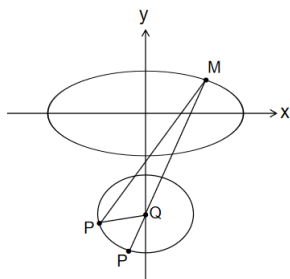


图 2

$$K_{OR} = \frac{\frac{t(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} - 1}{\frac{tm}{m^2 + (n+1)^2}} = \frac{t(n+1) - m^2 - (n+1)^2}{tm}, K_{OP} = \frac{n}{m}, \frac{\frac{t(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} - 1}{\frac{tm}{m^2 + (n+1)^2}} = q \frac{n}{m}, \text{ 根据斜率关系列式化简即可得到}$$

点 P 的轨迹方程: $m^2 + (n + \frac{2+qt-t}{2})^2 = \frac{(2+qt-t)^2}{4} + t - 1$, 可知 P 点在以 $Q(0, -\frac{2+qt-t}{2})$ 为圆心, $\sqrt{\frac{(2+qt-t)^2}{4} + t - 1}$ 为半径的圆上运动^[4]。根据三角形三边关系, $|PQ| + |QM| > |PM|$, 当 P、M、Q 三点共线时, 其距离最大。并且通过两点距离坐标求出, 所以 $|PM|_{\max} = |QM| + r$ 。

解法一(代数法): 设 $M(x_1, y_1)$, $|QM|^2 = x_1^2 + (y_1 + \frac{2+qt-t}{2})^2 = -8y_1^2 + (2+qt-t)y_1 + 9 + \frac{(2+qt-t)^2}{4}$, 观察此式, 可以看成是一个开口向下的二次函数, 并且在对称轴处取得最大值, 将 $y_1 = \frac{2+qt-t}{16}$ 代入原式可以求出结果 $|QM|^2 = 9 + \frac{9(2+qt-t)^2}{32}$, 因此 $|PM|_{\max} = \sqrt{9 + \frac{9(2+qt-t)^2}{32}} + \sqrt{\frac{(2+qt-t)^2}{4} + t - 1}$ 。

解法二(三角换元法): 由椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$, 设 $M(3\cos\alpha, \sin\alpha)$, $|QM|^2 = (3\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha + \frac{2+qt-t}{2})^2 = -8(\sin\alpha - \frac{2+qt-t}{16})^2 + \frac{(2+qt-t)^2}{32} + 9 + \frac{(2+qt-t)^2}{4}$ 。当且仅当 $\sin\alpha = \frac{2+qt-t}{16}$ 时, $|QM|^2$ 为 $9 + \frac{9(2+qt-t)^2}{32}$, 因此 $|PM|_{\max} = \sqrt{9 + \frac{9(2+qt-t)^2}{32}} + \sqrt{\frac{(2+qt-t)^2}{4} + t - 1}$ 。

由计算结果发现, 两动点之间的距离与两直线之间斜率的倍数 q 是有关系的, 且 q 越大, P、M 距离越大。因为 $k_{OR} = qk_{OP}$, 这会把 P 约束在某个轨迹上, 若未改变题目条件, P 的位置固定, PM 的最大值就是椭圆上到 P 的最大距离, 这与 OR、OP 的斜率倍数条件有关, 因为它决定了 P 的位置, 从而影响 $|PM|$ 的最大值^[5]。斜率倍数条件确定 P 的位置, P 的位置决定 $|PM|$ 的最大值, 所以 $|PM|$ 的最大值间接依赖于斜率倍数条件。

分析: 第二小问给了两种不同的解法, 本题的实质是双动点在椭圆和圆上的问题, 求两动点距离最大需分情况讨论: 若两曲线无包含关系, 最大距离必出现在两曲线的最远点处, 为椭圆上的点到圆心的距离+圆半径。若椭圆包含圆, 则最大距离为椭圆上离圆心最远的点到圆上离该点最远的点的距离(需具体分析)。因此本题转化为椭圆上点到圆心的最大距离+圆半径, 考虑到高考生的实际数学水平, 所以降低了难度^[6]。

5 总结与反思

解析几何的本质是利用代数工具刻画几何特征, 在“数”和“形”之间建立桥梁, 将几何关系用数学语言翻译(建模能力), 把代数结果还原成几何意义(解释能力), 实现思维之间的灵活转换。教师在重构题型时需要注意: 首先不能改变原题几何结构, 只改变系数、条件表述、设问形式等, 否则会脱离原题本身; 其次不改变考点分布, 原题考查什么内容, 重构后考点权重需与原题基本一致, 不能随意加入其它超纲考点, 否则违背重构题型的本意^[7]。因此本文重构题型, 将系数换成字母思考动点位置与动点间的距离是否与系数相关? 在计算时是否能化简约掉字母? 通过解题发现它们是它们之间是相关的, 这让教师反思在讲解每道题型的过程中重视图形转换, 引导学生通过直观想象将数学问题转化成几何模型, 这也是解决实际问题的关键。

新高考圆锥曲线题越来越倾向于一道题融合多个几何概念(内积、斜率、距离、最值), 但计算量控制得当, 难点在于逻辑链的衔接。因此对新高考复习的启示: (1) 重视“条件翻译”训练, 对“点在射线上”、“内积为定值”、“斜率成比例”等常见条件, 快速形成用数学语言将条件转化。(2) 最值问题注意“动点来源”, 做题时先思考哪些点是固定的? 哪些是动的? 动点受什么条件约束? 本题的 M 是椭圆上任意动点, 看似与斜率倍数无关, 但斜率倍数通过固定 P 影响了最值结果。(3) 计算要有策略, 比如 R 的表达式可先化简再代入等式, 比直接代入坐标化简更快, 用 x_0^2 代换 y_0^2 比用 y_0^2 代换 x_0^2 更简便^[8]。

参考文献

- [1] 黄晓婷.构建方法体系, 聚焦核心素养——评 2025 年新高考数学 I 卷[J].中学数学,2026,(15):46-47.
- [2] 王新宏.圆锥曲线高考题的多解探究与教学启示[J].数理化学习(高中版),2026,(5):35-42.
- [3] 邓辉.立足考题探本质回归教材创新路——对 2025 年高考数学新课标 I 卷圆锥曲线试题的思考[J].中学数学教学参考,2026,(10):66-68.
- [4] 逯瑶,徐小花,王树文.高考数学全国 I (B 卷)第 21 题圆锥曲线的多解探究[J].中学生数学,2021,(23):37-39.
- [5] 卢勇,曾荣.命题视角的进阶式研题: 实录与启示——以 2025 年高考数学全国 I 卷第 18 题为例[J].教育研究与评论(中学教育教学),2026,(2):9-14.
- [6] 戈靖,余建明.对 2025 年高考数学新课标 I 卷两道试题的探析与教学建议[J].中学数学教学参考,2026,(09):73-75.
- [7] 李健.高中平面解析几何教学的困境与对策——基于对吉、鄂、渝三地资深教师的开放式问卷调查[J].数学通讯,2026,(06):1-4+8.
- [8] 叶晓斌.一道高考解析几何压轴题的解法探究与推广[J].河北理科教学研究,2026,(2):6-10+21.

版权声明: ©2026 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS