

定义新视角下几何计算题的多元解法探究与教学思考

——以一道“反直角三角形”中考题为例

许秋寒

扬州大学 江苏扬州

【摘要】本文以一道涉及新定义“反直角三角形”的中考题为例，通过几何构造、代数计算、勾股定理及三角函数等多个维度，探究其不同解法。文章旨在透过解法的多样性，挖掘其背后的数学思想（分类讨论、方程思想、转化思想），并结合波利亚解题理论，探讨在核心素养背景下，如何通过一题多解教学提升学生的思维品质和解题能力。

【关键词】反直角三角形；一题多解；分类讨论；核心素养；中考数学

【收稿日期】2026 年 7 月 4 日

【出刊日期】2026 年 8 月 1 日

【DOI】10.12208/j.aam.20260012

A multi-solution exploration of geometric calculation problems from the perspective of new definitions and its teaching reflections: A case study based on a senior high school entrance examination problem on “Anti-right Triangles”

Qiuhan Xu

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 This paper takes a senior high school entrance examination problem involving a new definition of “anti-right triangle” as an example, and explores its multiple solutions through various approaches including geometric construction, algebraic computation, the Pythagorean theorem, and trigonometric functions. The aim of this paper is to uncover the underlying mathematical thinking (classification discussion, equation thinking, and transformation thinking) through the diversity of solutions. Furthermore, in conjunction with Pólya’s problem-solving theory, this paper discusses how to enhance students’ thinking quality and problem-solving abilities through multiple-solution instruction in the context of core competencies.

【Keywords】 Anti-right triangle; Multiple-solution instruction; Classification discussion; Core competencies; Senior high school entrance examination mathematics

1 引言

《义务教育数学课程标准(2022 年版)》强调要发展学生的数学核心素养，包括抽象能力、几何直观、推理能力、运算能力等^[1]。初中数学教学中，教师在引导学生掌握基础理论知识的同时，还要注重学生个人综合素养的提高^[2]。“定义新概念”型问题近年来在中考中频繁出现，这类问题不仅考察学生对新定义的理解能力，更考验其将陌生概念转化成熟悉模型的迁移能力。“一题多解”作为数学教学的经典策略，能够从不同角度揭示数学问题的内在联系，帮助学生构建系统化的知识网络。

值得注意的是，一题多解的价值不仅在于寻找适合考场的最优解，也在于借助更高阶的数学工具反观初中问题，从而揭示知识之间的纵向联系。基于此，本文在呈现初中常见解法的基础上，也增加了向量和解三角形视角，旨在为教师备课提供更开阔的思维素材，并为学有余力的学生搭建初高衔接的思维阶梯。作为高中数学教师，应当结合题目类型与特点，分析考查的知识内容，向学生传授解题方法，培养良好的解题思维^[3]。

2 问题呈现

(2025 年河南中考题第 15 题) 定义: 有两个内角的差为 90° 的三角形叫做“反直角三角形”, 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 8$, 点 P 为边 BC 上一点, 若 $\triangle APC$ 为“反直角三角形”, 则 BP 的长为_____.

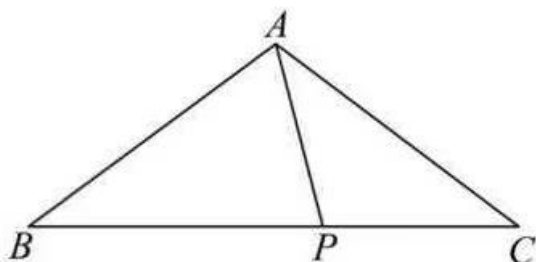


图 1 原题几何示意图

3 问题分析

本题属于“定义新概念”背景下的几何计算题。波利亚解题理论的第一阶段是“理解题目”。面对“反直角三角形”这一陌生概念^[4], 学生需要理解定义: 三角形中存在两个内角, 它们的差为 90° 。但是, 这一定义没有指定是哪两个角, 因此在 $\triangle APC$ 中应用该定义时, 分类讨论是解题的起点与关键。

已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 底边 $BC = 8$, 腰 $AB = AC = 5$. 过 A 点作 $AN \perp BC$ 于 N , 由等腰三角形的性质可得 $BN = CN = 4$, 再通过勾股定理易得底边上的高 AN 为 3, 这为后续计算提供了边长基础. 进而可得 $\cos \angle ACP = 0.8$, $\sin \angle ACP = 0.6$, 即 $\angle ACP$ 是定角, 约为 37° .

点 P 在 BC 上运动, $\triangle APC$ 由点 A 、 P 、 C 构成. 为了满足新定义, 我们需要分情况讨论 $\triangle APC$ 中哪两个角相差 90° .

1. 情况一: $\angle APC - \angle ACP = 90^\circ$
2. 情况二: $\angle APC - \angle PAC = 90^\circ$
3. 情况三: $\angle PAC - \angle ACP = 90^\circ$

此外, 还需考虑角度差为 90° 的顺序 (如 $\angle B - \angle ADB = 90^\circ$ 等), 但受三角形内角和为 180° 的限制, 实际可行情况有限。

4 解法探究

情形一: $\angle APC - \angle ACP = 90^\circ$

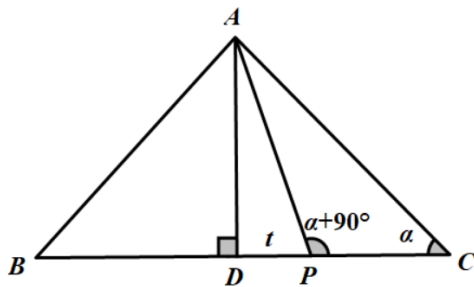


图 2 情形一几何关系图

题干分析: 由于 $AB = AC$, 作 $AD \perp BC$, 则 D 为 BC 中点。

则 $BD = DC = 4$, $AB = AC = 5$, 由勾股定理可得 $AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ 。

设 $DP = t$, 则 $AP = \sqrt{t^2 + 9}$, $PC = 4 - t$ 。

设 $\angle ABC = \alpha$, 则 $\angle ACB = \alpha$, $\angle APC = 90^\circ + \alpha$, $\angle APB = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha$ 。

由于三角形内角和为 180° , 可得 $\angle PAC = 90^\circ - 2\alpha$, $\angle PAD = \alpha$ 。

因为 $AB=AC$ ，所以 AD 是 BC 边上的中线和 $AD \perp BC$ 以及 $\angle BAC$ 的角平分线，所以 $\angle BAD = \angle DAC = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 90^\circ - \alpha$ 。

解法一：勾股定理法

由勾股定理可知 $AP = \sqrt{9+t^2}$ 。

又因为 $\angle BAP = 90^\circ$ ，所以 $AB^2 + AP^2 = BP^2$ ，即 $25 + (9+t^2) = (4+t)^2$ 。

解得 $t = \frac{9}{4}$ ，则 $BP = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$ 。

评注：勾股定理是解决几何计算问题的常见方法，核心是将几何关系转化为代数方程。该解法以勾股定理为核心工具，结合等腰三角形的对称性和角度差条件，通过设未知数、建立方程求解。其思路和步骤体现了代数化几何问题的基本思想。教学中可引导学生关注如何从几何条件中提炼出代数方程。该方法的局限性在于对图形结构依赖较强，需先确定垂直关系（如本题的高线），否则难以直接应用勾股定理。

解法二：相似三角形法

$$\therefore \begin{cases} \angle DAP = \angle ABD = \alpha \\ \angle ADP = \angle ADB = 90^\circ \\ \angle APD = \angle BAD = 90^\circ - \alpha \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADP$ 与 $\triangle BAD$ 相似

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{PD}{DA}, \quad \text{又} \because BD = DC \text{ 所以 } BD \text{ 是 } BC \text{ 边上的中线, } \therefore BD = \frac{1}{2} BC = 4。$$

$$\therefore AD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3, \text{ 代入得 } PD = \frac{9}{4}。$$

$$\text{又因为 } BD = 4, \text{ 所以 } BP = BD + DP = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}。$$

评注：相似三角形法是几何解题中极具代表性的方法，强调图形结构的识别和转化。本解法中，通过构造相似三角形，将角度差条件转化为比例关系、进而建立方程。该方法计算量较小，思维过程更贴近几何直观，适合培养学生观察图形、发现隐含关系的能力。教学中可引导学生思考：如何确定两个三角形相似？相似条件的发现是否具有一般性？

解法三：平面向量坐标法

向量作为一种同时兼具大小与方向、存在于空间中的一种数学工具，能够用来处理一些用常规方法难以解决的试题，有助于解题效率的提升^[5]。

不妨设 D 点为原点，以 DC 方向为 x 轴正方向，以 DA 方向为 y 轴正方向。

设 DP 长度为 t ，则可以得到 $D(0,0)$ ， $C(4,0)$ ， $B(-4,0)$ ， $A(0,3)$ ， $P(t,0)$ 。

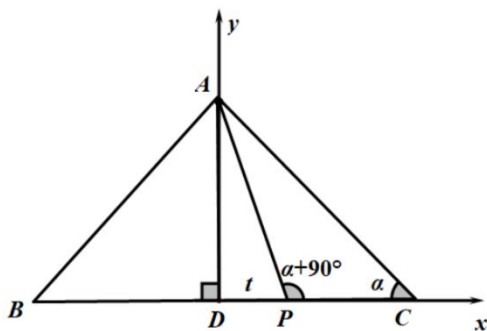


图3 情形一向量坐标图

由于 $\angle BAP = \angle BAD + \angle DAP = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$

因此 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ，即 $(-t) \cdot (-4) + 3 \cdot (-3) = 4t - 9 = 0$ ，可以得到 $t = \frac{9}{4}$ 。

所以 $BP = BD + DP = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$ 。

评注：向量法体现了解析几何思想，通过建系、坐标化、点积运算实现几何条件的代数表达，适用于图形规则，容易建系的问题。其优势在于逻辑直白、运算规范，减少了辅助线构造的思维负担。教学中可引导学生掌握“建系—设点—列方程”的流程，并注意坐标选择对计算复杂度的影响。

解法四：解三角形法

在 $\triangle APC$ 中，由正弦定理可知 $\frac{PC}{\sin \angle PAC} = \frac{AC}{\sin \angle APC}$ ，

得 $\frac{PC}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{AC}{\sin(\alpha + 90^\circ)}$ ，化简得 $\frac{PC}{\cos 2\alpha} = \frac{AC}{\cos \alpha}$

由于 $AC = 5$ ， $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)，所以 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{7}{25}$ 。

即 $\frac{PC}{\frac{7}{25}} = \frac{5}{\frac{4}{5}}$ ，解得 $PC = \frac{7}{4}$ 。故 $BP = BC - PC = 8 - \frac{7}{4} = \frac{25}{4}$ 。

此法也可以改为对 $\triangle APC$ 用余弦定理，由于三边均可由 t 来表示，且 $\cos \alpha = \frac{DC}{AC} = \frac{4}{5}$ 。

则可转化为关于 t 的一元二次方程。

评注：本解法引入正弦定理，将角度差条件转化为三角方程，体现了函数与方程思想。其优点在于不依赖辅助线，直接利用已知角度和边长关系，适合角度信息明确的问题。教学中可引导学生体会三角工具在几何计算中的强大作用，同时注意角度范围的判断（如锐角、钝角）对方程解的影响，避免出现漏解。

情形二： $\angle APC - \angle PAC = 90^\circ$

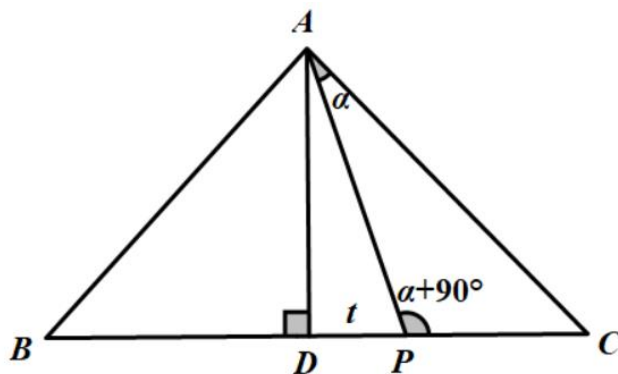


图4 情形二几何关系图

作 $AD \perp BC$ ， $PQ \perp AC$ ，由于 $AB = AC$ ，则 D 为 BC 中点。

由于 $BD = DC = 4$ ， $AB = AC = 5$ ，由勾股定理可得 $AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ 。

设 $DP = t$ ，则 $AP = \sqrt{t^2 + 9}$ ， $PC = 4 - t$ 。

设 $\angle PAC = \alpha$ ，则 $\angle APC = 90^\circ + \alpha$ ， $\angle ACB = \angle ABC = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$ 。

$$\angle BAD = \angle DAC = 180^\circ - (90^\circ - 2\alpha) - 90^\circ = 2\alpha, \quad \angle DPA = 180^\circ - \angle APC = 90^\circ - \alpha,$$

$$\angle QPC = 180^\circ - \angle PQC - \angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - 2\alpha) = 2\alpha.$$

$$\angle DAP = \angle PAQ = \alpha, \quad \angle QPC = 2\alpha.$$

解法一：三角函数法

因为 $\angle ADP = \angle AQP = 90^\circ$, $\angle APD = \angle APQ = 90^\circ - \alpha$, $AP = AP$

因此 $\triangle ADP \cong \triangle AQP$, 即 $AQ = AD = 3$, $PQ = PD = t$ 。

$$\text{由于 } \sin \angle ACB = \frac{AD}{AC} = \frac{PQ}{PC}, \text{ 因此 } \frac{3}{5} = \frac{t}{4-t}.$$

$$\text{解得 } t = \frac{3}{2}. \text{ 因此 } DP = \frac{3}{2}, \quad BP = BD + DP = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

评注：该解法以勾股定理为核心工具，结合等腰三角形的对称性和角度差条件，通过设未知数、建立方程求解。其思路和步骤体现了代数化几何问题的基本思想。

解法二：向量法

以 D 点为原点， DC 方向为 x 轴， DA 方向为 y 轴。

不难得出 $C(4,0)$, $P(t,0)$, $A(0,3)$, $B(-4,0)$

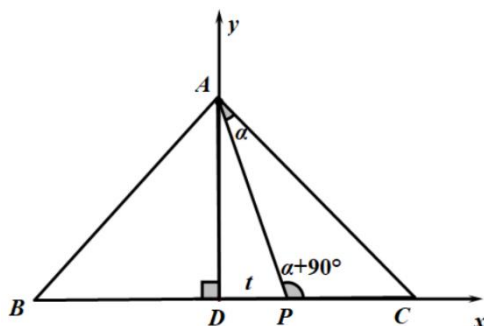


图 5 情形二向量坐标图

$$\text{已知 } AQ = AD = 3, \text{ 且 } AC = 5, \text{ } A, Q, C \text{ 三点共线, 因此 } \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AC} = \left(\frac{12}{5}, -\frac{9}{5} \right),$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{12}{5} - t, \frac{6}{5} \right).$$

$$\text{通过 } \overrightarrow{AQ} \perp \overrightarrow{PQ}, \text{ 可得 } \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0, \text{ 即 } \frac{12}{5} \cdot \left(\frac{12}{5} - t \right) + \frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{9}{5} \right) = 0, \text{ 解得 } t = \frac{3}{2}.$$

$$\text{即 } DP = \frac{3}{2}, \text{ 因此 } BP = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

评注：通过建系、坐标化、点积运算实现几何条件的代数表达，适用于图形规则，容易建系的问题。其优势在于逻辑直白、运算规范，减少了辅助线构造的思维负担。

情形三：当 $\angle CAP - \angle C = 90^\circ$ 时。在直角 $\triangle ADC$ 中， $\sin C = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \approx 0.6$ ，而 $\sin 30^\circ = 0.5$ ，因为

$0.6 > 0.5$ ，所以 $\angle C > 30^\circ$ ，那么 $\angle CAP = \angle C + 90^\circ > 120^\circ$ ，又因为在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 180^\circ - 2\angle C$ ，由于 $\angle C > 30^\circ$ ，所以 $\angle BAC < 120^\circ$ ，而 $\angle CAP$ 是 $\angle BAC$ 的一部分，不可能大于 $\angle BAC$ ，因此这种情况不存在。

情形四：当 $\angle CAP - \angle APC = 90^\circ$ 时，因为 $\angle APC$ 在点 P 与点 B 重合时最小，此时

$\angle APC = \angle B = \angle C > 30^\circ$ ，则 $\angle CAP = \angle APC + 90^\circ > 120^\circ$ ，同样会使 $\angle CAP > \angle BAC$ ，所以这种情况也不存在。

综上所述， BP 的长为 $\frac{25}{4}$ 或 $\frac{11}{2}$ 。

5 解法的比较与思考

上述几种解法各有特点，总结如下表所示：

表 1 不同解法特点对比

解法类型	核心工具	思维侧重点	适用场景	计算复杂度
勾股定理法	勾股定理+三角恒等式	代数运算	已知两边及夹角	中
相似三角形法	相似三角形判定与性质	几何直观	存在明显相似关系	低
向量坐标法	向量点积、共线条件	解析几何思想	便于建系的问题	中高
三角函数法	正弦/余弦定理	函数与方程思想	角度关系明确	中

从教学角度出发，值得关注以下几点：

(1) 分类讨论的完整性：新定义问题往往因“未指定具体角”而自然引发分类讨论，教师要引导学生有序列举，避免遗漏或重复。

(2) 多种解法的统一性：不同解法看似差异较大，实则都归结为方程求解，体现了“几何问题代数化”的数学思想。

(3) 错误解法的辨析价值：情形一中的部分解法得出不同结果，正好可作为教学素材，引导学生反思隐含条件（如点 D 的位置范围，钝角三角形的边角关系等），培养批判性思维。

6 结语

这是一道以新定义为背景的几何题，通过一题多解的探究，不仅训练了学生的逻辑推理和数学运算能力，更深刻地揭示了数学知识之间的内在联系。在波利亚解题理论的指导下，学生经历了“理解定义——分类讨论——建立方程——求解验证——回顾反思”的完整思维过程。作为教师，我们应当引导学生透过解法的多样性，把握问题的数学本质，即无论采用何种方法，核心都是将新定义条件转化为可运算的数学关系。通过构建知识网络、搭建探究平台、实施个性化评价，让学生在多角度分析问题的过程中，加深对几何图形本质的理解，提升逻辑推理、直观想象等能力^[6]。在日常教学中，可以：

- (1) 精选一题多解的典型题目，组织学生小组探讨；
- (2) 鼓励学生尝试不同知识板块的解法（几何、代数、三角、向量）；
- (3) 引导学生在对比中抽象出通用的解题策略（如设未知数、建方程、选定理）。

让解题教学真正服务于学生数学核心素养的发展。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准：2022 年版[M].北京：北京师范大学出版社，2022.
- [2] 靳隽殊.核心素养视角下初中数学深度教学策略探究[J].数学学习与研究,2024,(1):8-10.
- [3] 陈艳庆.基于高考题的高中数学解题方法探究[J].数理天地(高中版),2026,(9):87-88.
- [4] G.波利亚.怎样解题：数学教学法的新面貌[M].涂泓，冯承天，译.上海：上海科技教育出版社，2002.
- [5] 陈桂芬.向量法在高中数学解题中的巧妙应用[J].数理天地(高中版),2026,(7):56-57.
- [6] 张奠宙，宋乃庆.数学教育概论[M].北京：高等教育出版社，2016.

版权声明：©2026 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS