

构造法在高中数学解题中的应用

徐嘉诗

扬州大学数学科学学院 江苏扬州

【摘要】构造法是数学化归与转化的核心思维工具，但在高中解题教学中，学生常停留在机械模仿，缺乏对构造策略的元认知反思。本文基于“问题结构识别—构造路径选择—等价性验证”的三维框架，系统梳理函数构造、方程构造、向量构造和图形构造四类典型路径，并结合近年高考及模拟题，逐类剖析各类方法的触发条件、操作逻辑与适用边界。研究发现，构造法的有效运用更依赖于学生对问题深层结构的敏感度，而非知识量的积累；四类构造方法并非孤立，在综合问题中可形成策略联动。本文旨在为高中数学教学提供可操作的方法论，促进学生解题思维从经验型转向结构型。

【关键词】构造法；高中数学；解题

【收稿日期】2026 年 7 月 4 日

【出刊日期】2026 年 8 月 1 日

【DOI】10.12208/j.aam.20260016

The application of construction method in solving senior high school mathematics problems

Jiashi Xu

School of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 The constructive method is a core thinking tool for mathematical reduction and transformation. However, in senior high school problem-solving instruction, students often apply it through mechanical imitation, lacking metacognitive awareness of construction strategies. Based on a three-dimensional analytical framework—“problem structure identification, construction path selection, and equivalence verification”—this paper systematically examines four typical construction pathways: function construction, equation construction, vector construction, and graphical construction. Using recent Gaokao and mock examination questions, we analyze the triggering conditions, operational logic, and applicable boundaries of each approach. The findings indicate that effective use of the constructive method depends more on students’ sensitivity to the deep structure of problems than on the sheer volume of knowledge acquired. Moreover, the four construction approaches are not isolated; they can form strategic synergies in complex composite problems. This study aims to provide actionable methodological guidance for senior high school mathematics teaching, facilitating the transformation of students’ problem-solving thinking from experience-based to structure-oriented reasoning.

【Keywords】 Construction method; Senior high school mathematics; Problem solving

构造法是指在面对直接求解困难或过程繁琐的数学问题时，解题者依据题设条件中隐含的数量关系、结构特征或几何背景，主动创设一个与原问题逻辑等价的辅助数学对象（如函数、方程、向量或几何图形），进而借助该对象的既定性质、运算法则或直观呈现来间接求解原问题的一种策略性方法。该方法的关键在于三条准则：其一，构造对象的确定性——必须由题设条件唯一或合理导出；其二，逻辑等价性——构造对象的属性结论能够无失真地映射回原问题；其三，运算可解性——构造后的求解路径应显著优于直接求解。它指的是在一些数学问题用传统的固定方式得不到一个正确的结果时，可以转换一个思考问题的方式，用另一个角度去思考问题、解决问题，从而发现事物内部的数形、结构、已知、未知等结论关系，进而构造出一个全新的数学模型，使这个全新构造出来的数学模型能够清楚地展现出原来模糊不清的问题性质，最后实现找到解决问题的最简单的方法^[1]。

1 构造法在高中数学解题中应用的意义与价值

1.1 拓宽解题思路，提高解题效率

构造法通过引入新的数学对象或结构来解决问题，这种方法能够帮助学生从一个不同的角度去思考问题，从而找到新的解题思路。在一些复杂的数学问题中，直接求解可能非常困难，或者运用先前常用的方法会耗费较多的时间。如果运用构造法巧妙地构造辅助函数、图形或方程等，可以有效地简化问题，再利用熟悉的基础知识对问题进行分析，进而使问题得到解决，从而提高解题效率。当学生在遇到陌生问题的时候，可以运用构造法将其转化为熟悉的问题，也就是用另一种思路来解决陌生的问题，提高解题效率。

1.2 培养创新思维，增强应用意识

构造法对学生创新思维的促进机制可从两个维度加以理解。在认知灵活性维度，学生面对一个看似与函数无关的不等式问题时，需要抑制“按题型套方法”的自动化倾向，主动激活函数单调性知识进行表征转换，这一过程训练了认知抑制与任务转换能力。在元认知监控维度，学生在构造过程中需要不断自问“我所构造的对象是否与题干等价”“是否有更合适的构造路径”，这种自我对话有助于形成反思性解题习惯。教师应着重引导学生对比“为何此题构造函数而非构造方程”，以此强化策略性知识而非仅程序性知识。

1.3 促进知识整合，构建知识体系

运用构造法有时会涉及多个数学知识点和技巧的综合运用。在解题过程中，学生需要将所学知识进行整合和应用，这种整合过程有助于数学知识的巩固与深化。通过应用构造法解题不仅可以提高学生快速提取不同知识解决问题的能力，而且还能加深学生对知识的理解，促使学生熟悉代数、几何等基本知识技能，并多方面加以综合利用^[2]。

在高中数学的每个章节中，都有围绕本章主题的各个知识点，这些知识点形成了一个知识网络，学生在运用构造法的过程中，首先根据题目所给条件判断应该运用哪种构造法，然后进一步运用某章节的某些知识点来解题。在这个过程中，正体现了学生对知识的整合，从而精准地掌握解题过程中运用到的知识点。对于基础较差的学生，有助于使零散的知识成体系，对于基础较好的学生，有助于完善已有的知识体系。

1.4 提升数学素养，适应高考改革趋势

构造法的运用不仅限于解题本身，它还能帮助学生更好地理解数学的内在逻辑和美感。通过欣赏和创造数学结构，学生可以提升对数学的兴趣和热爱，从而全面提升数学素养，尤其是数学学科六大核心素养中的数学抽象、逻辑推理、数学建模等素养的发展。随着高考改革的深入，数学试题越来越注重考查学生的创新思维和综合能力。构造法作为一种灵活多变的解题方法，正好符合这一改革趋势。比如，构造图形可以化抽象为具体，使题目要求更直观，建立形与数的联系，构建数学问题的直观模型，利用图形分析数学问题，探索解决问题的思路，有助于把握问题的本质，明晰思维的路径^[3]。

2 高中数学解题中的各类构造法

构造法的分类并非绝对，不同分类标准之间可能存在交叉。例如，构造函数法既属于按对象形式分类，也可能属于按解题策略分类。在实际应用中，需根据问题的具体特征和解题目标选择合适的构造方法。掌握多种构造法的分类和应用场景，有助于提升数学思维的灵活性和创造力。下文根据构造对象对构造法进行分类，并针对每一种方法给出具体例题。

2.1 构造函数

构造函数是高中数学解题中比较常见的一种构造法，在不同题型中都有所应用。函数的相关知识点很多，体系庞大，可以与高中所学的其他知识进行结合出现在题中，但为了考察学生对于抽象的题目条件是否会运用所学的函数知识解决，出题人通常希望学生能够构造函数辅助解题。一般情况下，为了快速地获得解题思路，构造函数是一种很好的方法，我们可以根据题中所给条件进行分析，联想函数的定义域、解析式、值域、图像、性质等合理构造适当函数，并借助所构造的函数的定义、性质、图像巧妙地解决问题^[4]。

2.1.1 比较大小问题

如果需要比较大小的几个数的形式比较复杂，涉及多个相似的表达式，如对数、指数或分式，那么用直

接计算的方法是比较困难的,此时我们就会想到用更系统的方法,即构造函数。通过构造函数将几个数的形式统一起来,确定自变量的范围,利用函数的单调性得到函数值的大小关系。这样既能避免复杂的计算,又通过函数的性质快速解决问题。

例 1 设

$$a = \ln 2, b = \frac{\ln 3}{\sqrt{3}}, c = \frac{2}{e},$$

则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

解 设

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0,$$

则对 $f(x)$ 求导得到导函数

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < e$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, e)$ 上单调递增.

因为 $\sqrt{3} < 2 < e$, 所以 $f(\sqrt{3}) < f(2) < f(e)$, 即

$$\frac{\ln \sqrt{3}}{\sqrt{3}} < \frac{\ln 2}{2} < \frac{1}{e},$$

易得

$$\frac{\ln 3}{2\sqrt{3}} < \frac{\ln 2}{2} < \frac{1}{e}.$$

不等式两边同乘 2 得

$$\frac{\ln 3}{\sqrt{3}} < \ln 2 < \frac{2}{e}.$$

即 $b < a < c$, 故选 B.

例 2 比较 2024^{2025} 与 2025^{2024} 的大小。

分析: 对这两个数取对数, 即比较 $\ln 2024^{2025}$ 与 $\ln 2025^{2024}$ 的大小, 再根据对数函数在其定义域内是单调递增的, 得到 2024^{2025} 与 2025^{2024} 的大小关系。

解 构造函数

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

对函数 $f(x)$ 求导, 得到

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

然后判断单调性, 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 即函数 $f(x)$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上是单调递减的。

因为 $2024, 2025 > e$, 且 $2024 < 2025$, 根据函数 $f(x)$ 的单调性, 有

$$f(2024) > f(2025),$$

即

$$\frac{\ln 2024}{2024} > \frac{\ln 2025}{2025},$$

变形得到 $2025 \ln 2024 > 2024 \ln 2025$ ，进一步得到 $\ln 2024^{2025} > \ln 2025^{2024}$. 由于对数函数在其定义域内是单调递增的，所以 $2024^{2025} > 2025^{2024}$.

当然，这道题还可以用不等式放缩的方法解决，首先将题目转化为比较

$$\frac{2024^{2025}}{2025^{2024}} \text{ 与 } 1$$

的大小，然后提取公因式

$$\frac{2024^{2025}}{2025^{2024}} = 2024 \cdot \left(\frac{2024}{2025}\right)^{2024} = 2024 \cdot \left(1 - \frac{1}{2025}\right)^{2024},$$

接着利用不等式放缩，经历三次放缩，才能得到

$$\frac{2024^{2025}}{2025^{2024}} \text{ 与 } 1$$

的大小关系，即 $2024^{2025} > 2025^{2024}$.

通过对上述两种解题方法的比较，我们发现构造函数的方法更容易理解，并且结合导数确定函数的增减趋势是学生比较熟悉的解题技巧，将比较大小问题转化为函数单调性分析的问题，便于学生更直观地了解数之间的大小关系。虽然不等式放缩也能解决这个问题，但是这种方法技巧性较强，对于基础薄弱的学生不易理解，过程也比较繁琐。

本题表面上是比较两个指数幂的大小，实际上考察了对数的运算和对数函数的相关性质。虽然与例 1 构造了相同的函数，也是利用函数的单调性来解题，但是例 2 是对例 1 的深化，例 1 中根据题中三个数的特征，很容易想到构造哪个函数，而例 2 中要先取对数，再将对数变形之后，才能构造出合适的函数，根据函数的单调性得到对数的大小关系。最后还要由对数函数的单调递增的性质才能得到最终答案。

2.1.2 不等式证明问题

例 3 已知曲线 $C: f(x) = e^x - xe^x$ 在点 $A(1, f(1))$ 处的切线为 l .

(1) 求直线 l 的方程；

(2) 求证：除点 A 外，曲线 C 在直线 l 的下方；

解 (1) 对函数 $f(x) = e^x - xe^x$ 求导得到导函数 $f'(x) = -xe^x$ ，所以 $f(1) = 0$ ， $f'(1) = -e$ ，所以直线 l 的方程为 $y = -ex + e$.

(2) 分析：要证明除点 A 外，曲线 C 在直线 l 的下方，问题本质就是证明 $f(x) \leq -ex + e$ 恒成立。因此，构造函数 $g(x) = -ex + e - e^x + xe^x$ 。求它的最小值大于或等于 0.

证明：令 $g(x) = -ex + e - e^x + xe^x$ ，则 $g'(x) = -e - e^x + e^x + xe^x = -e + xe^x$.

由于函数 $g'(x)$ 的零点无法确定，因此再次求导，研究它的导数的性质。

令 $h(x) = g'(x)$ ，则 $h'(x) = (x+1)e^x$.

由 $h'(x) > 0$ ，解得 $x > -1$ ；由 $h'(x) < 0$ ，解得 $x < -1$ 。所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减，在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增。

当 x 趋近于 $-\infty$ 时， $h(x)$ 趋近于 $-e$ ， $h(1) = 0$ ，所以当 $x < 1$ 时， $g'(x) = h(x) < 0$ ，当 $x > 1$ 时， $g'(x) = h(x) > 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增。所以 $g(x) \geq g(1) = 0$ ，当且仅当 $x = 1$ 时等号成立。

所以除切点 $(1, 0)$ 之外，曲线 C 在直线 l 的下方。

在思考第二小时时，根据题目要求，学生可能不会第一时间想到构造函数，但是又无法精准画出曲线 C 的图像，所以从几何的角度解题比较困难，那么自然而然地会选择代数方法，而构造函数在不等式证明问题中的应用可以帮助学生将复杂的问题简单化，学生运用熟悉的函数单调性、最值的知识就可以快速解决问题。

2.2 构造方程

“方程思想”是指从分析问题的数量关系入手,将问题中的已知量和未知量之间的数量关系通过适当设元建立起方程(组),然后通过解方程(组)使问题得到解决的思维方式^[5]。这种思想一直都是学生解题过程中的重要思想,观察题中所给条件以及相关数量关系,先设未知量,构造出符合题意的方程,并对方程进行求解,再根据题干求出最终结果。通过构造方程的方法求解高中遇到的数学习题,有利于培养高中生的观察能力、思维能力^[6]。

例4 如图2-1,设 F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点,点 P 是以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆在第一象限内的一个交点,延长 PF_2 与椭圆交于点 Q 。若 $|PF_1| = 4|QF_2|$,则直线 PF_2 的斜率为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. -1 C. -2 D. -3

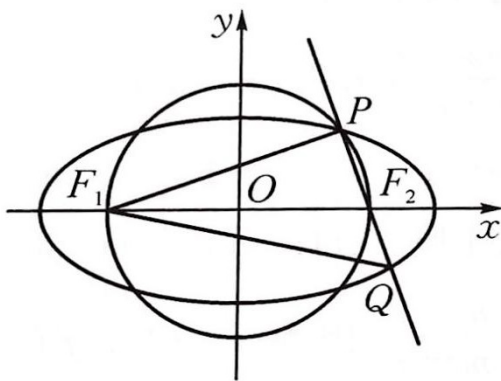


图2-1 例4

解 因为点 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上,所以 $PF_1 \perp PF_2$.

因为点 P, Q 在椭圆上,所以 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, $|QF_1| + |QF_2| = 2a$.

设 $|QF_2| = m$,则 $|PF_1| = 4|QF_2| = 4m$,

所以 $|QF_1| = 2a - m$, $|PF_2| = 2a - 4m$, $|PQ| = |PF_2| + |QF_2| = 2a - 3m$.

在直角三角形 PQF_1 中, $|PF_1|^2 + |PQ|^2 = |QF_1|^2$, 即 $(4m)^2 + (2a - 3m)^2 = (2a - m)^2$, 解得 $a = 3m$. 所以

$$|PF_2| = 2a - 4m = 2m, \tan \angle PF_2F_1 = \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = 2,$$

故 $k_{PF_2} = \tan(\pi - \angle PF_2F_1) = -\tan \angle PF_2F_1 = -2$.

本题属于直线与圆锥曲线的综合问题,主要考察的是直线的斜率。要求直线的斜率很多同学首先想到的就是通过直线上两个点的坐标来求解,但结合题中所给的条件, F_2 的坐标很容易得到,但是 P 是一个动点,坐标无法确定。所以我们想到另一种求斜率的方法,通过倾斜角求斜率,也就是求倾斜角的正切值。

在解析几何中借助构造方程法解题,往往具有以下特征:题目提供的条件包含一些等量关系,已知量较少,要设未知量才能表示出要用到的线段,大多数情况下是求椭圆或双曲线的离心率,或者是上述例题中要求的直线斜率。学生在判断出这道题要构造方程后,就要挖掘题中隐藏的边与边之间的关系,列出方程,解得未知量与已知量的关系,这样问题就能快速得到解决。

例5 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, 求 c 的取值范围。

解 因为 $(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2$.

所以 $ab + bc + ca = 0$. $ab = -c(a + b)$.

又 $a + b = 3 - c$, 所以 $ab = -c(3 - c)$.

从而构造方程 $x^2 + (c - 3)x - c(3 - c) = 0$, 则 a, b 是该方程的两个实数根。

所以 $\Delta \geq 0$, 即 $(c-3)^2 + 4c(3-c) \geq 0$. 化简得 $c^2 - 2c - 3 \leq 0$.

解得 $-1 \leq c \leq 3$. 故 c 的取值范围是 $[-1, 3]$.

本题属于一个多变量问题, 通过运算变形找出 a , b 和与积的关系, 并写成关于 c 的表达式, 就能联想到韦达定理, 从而构造一元二次方程, 联系方程实数根数量与 Δ 的关系, 得到一个关于 c 的不等式, 解出它的取值范围.

除了构造方程的方法, 我们还可以通过代数式的变换, 结合不等式的性质来确定变量的范围. 首先, 我们设 $x = a$, $y = b$, 由题目条件得到 $x + y = 3 - c$, $x^2 + y^2 = 9 - c^2$. 利用完全平方公式, 可以得到 $(3 - c)^2 = 9 - c^2 + 2xy$, 化简得到 $xy = c^2 - 3c$. 根据 $x^2 + y^2 \geq 2xy$, 将关于 c 的代数式带入不等式, 就可以解出 c 的范围. 相比之下, 构造一元二次方程这种方法更灵活, 不是单纯地联系代数式的知识, 而是将 a , b 看作方程的根, 从一个新的角度来解题.

2.3 构造向量

2.3.1 在立体几何中构造向量

在立体几何的研究领域中, 构造向量是一项非常重要的方法, 并且应用非常广泛. 构造向量能够帮助我们更好地理解 and 解决立体几何中的各种问题.

在具体的操作过程中, 首先需要根据立体几何图形的特点和所给定的条件, 选取合适的点和线段. 通过确定这些关键的位置点, 我们可以根据向量的定义和性质, 精确地构建出各种向量. 这些向量能够反映出立体几何图形中线段之间的相对位置关系、长度以及夹角等重要信息.

同时, 在构造向量时, 还需注意向量的方向, 因为向量的方向对于描述立体几何中的各种关系起着至关重要的作用. 特别是在求解立体几何中的长度、角度和体积、线面或面面夹角的三角函数值等问题时, 合理构造向量能为我们的推理和计算提供有力的支持. 通过运用向量的数量积、向量积等运算, 我们在解题时能够更简便、更准确地得到答案. 所以在立体几何中构造向量是一种非常有效且容易为学生所掌握的工具和手段^[7].

例 6 如图 2-2, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l .

(1) 证明: $l \perp$ 平面 PDC ;

(2) 已知 $PD = AD = 1$, Q 为 l 上的点, 求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.

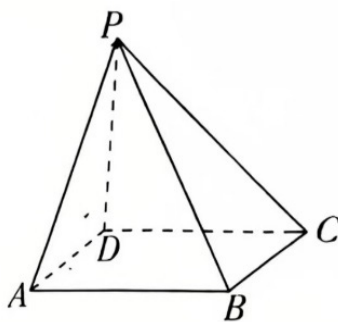


图 2-2 四棱锥

证 (1) 因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 所以 $PD \perp AD$. 又底面 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AD \perp DC$. 因此 $AD \perp$ 平面 PDC . 因为 $AD \parallel BC$, $AD \not\subset$ 平面 PBC , 所以 $AD \parallel$ 平面 PBC .

由已知得 $l \parallel AD$.

因此 $l \perp$ 平面 PDC .

(2) 以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴正方向, 建立如图 2-3 所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.

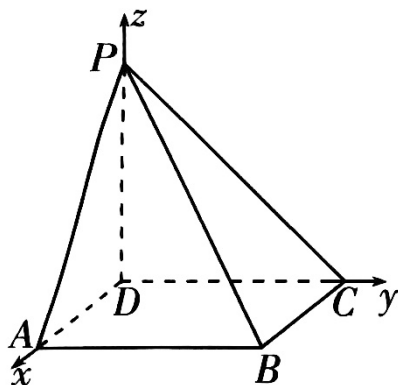


图 2-3 空间直角坐标系

则 $A(1,0,0)$, $D(0,0,0)$, $C(0,1,0)$, $B(1,1,0)$, $P(0,0,1)$, $\overrightarrow{DC} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{PB} = (1,1,-1)$.

由 (1) 可设 $Q(a,0,1)$, 则 $\overrightarrow{DQ} = (a,0,1)$.

设 $\vec{n} = (x,y,z)$ 是平面 QCD 的法向量, 则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} ax + z = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

可取 $\vec{n} = (-1,0,a)$.

所以

$$\cos\langle \vec{n}, \overrightarrow{PB} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} = \frac{-1-a}{\sqrt{3}\sqrt{1+a^2}}$$

设 PB 与平面 QCD 所成角为 θ , 则

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{1 + \frac{2a}{a^2+1}}.$$

因为

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{1 + \frac{2a}{a^2+1}} \leq \frac{\sqrt{6}}{3},$$

当且仅当 $a = 1$ 时等号成立。所以 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

本题属于立体几何的证明与代数的综合题, 第一小题是一道常规的证明题, 只需要利用线面垂直和线面平行的判定定理进行证明即可。而第二小题是求线面夹角正弦值的最大值, 由于直线 l 在四棱锥中没有具体的位置, 所以点 Q 与平面 QCD 都无法在图中直接画出, 在这里想运用空间想象能力构造出这个线面角比较困难, 所以我们通过构造空间向量来解决问题。这道题需要注意的一点是线面夹角正弦值就是平面方向向量与法向量的余弦值, 这是解题的关键一步, 最后通过简单的计算就完成了解题。

如果题中展现的几何体明显满足建系的条件, 也就是有三条互相垂直的直线, 那么这道题用构造向量的方法是最方便的。对于空间想象能力较弱的学生来说, 构造向量的方法更多地是需要学生进行代数运算, 减少了对空间几何的抽象思考。

2.3.2 在平面中构造向量

平面向量是学生从数学启蒙到数学学科知识体系形成中第一次认识的既有大小又有方向的量,虽是初次认识,但学生理解起来难度不算大。了解向量的几何背景和现实背景后,在解题中构造适当的向量可以是问题解决起来更方便^[4]。平面向量在高中数学中也是非常重要的一章,包括向量的模、向量的运算、向量基本定理及坐标表示等知识,可以用来解决代数问题与几何问题。一些题目直接观察似乎与向量毫无关系,但往往通过构造向量使得题目更容易求解。因此学生通过练习,可以查漏补缺,也会使得自己的知识体系得到健全^[7]。

例7 设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = |z_2| = 3, z_1 + z_2 = \sqrt{3} + i$, 则 $|z_1 - z_2| = (\quad)$

分析: 题目要求可转化为 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3, \vec{a} + \vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$, 求 $|\vec{a} - \vec{b}|$.

解 因为 $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$, 所以 $4 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 36$, 得到 $|\vec{a} - \vec{b}| = 4\sqrt{2}$, 即 $|z_1 - z_2| = 4\sqrt{2}$.

本题属于复数有关的计算题。但是这道题看似简单,学生可以用最原始的方法,就是设出 z_1, z_2 的复数一般形式,再根据题中所给条件,按照复数的模的定义以及实部和虚部的对应关系,计算出答案。但是对于一道填空题来说,计算量偏大,所以我们用构造向量的方法来减少运算量,通过向量的模的运算解决问题,既提高了解题效率,又有助于学生灵活转换思维。

例8 已知椭圆

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1,$$

F_1, F_2 为两个焦点, O 为原点, P 为椭圆上一点,

$$\cos \angle F_1 P F_2 = \frac{3}{5},$$

则 $|PO| = (\quad)$

$$A. \frac{2}{5} \quad B. \frac{\sqrt{30}}{2} \quad C. \frac{3}{5} \quad D. \frac{\sqrt{35}}{2}$$

解 由题意知, $a = 3, b = \sqrt{6}, c = \sqrt{3}$.

因为

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a = 6 \quad ①,$$

所以在 $\triangle PF_1 F_2$ 中, 由余弦定理知,

$$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2|\cos \angle F_1 P F_2 = |F_1 F_2|^2,$$

又 $|F_1 F_2| = 2c = 2\sqrt{3}$,

所以

$$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - \frac{6}{5}|PF_1||PF_2| = 12 \quad ②$$

联立①②, 解得

$$|PF_1||PF_2| = \frac{15}{2}, |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 21,$$

而

$$\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}),$$

所以

$$|PO| = |\overrightarrow{PO}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}|,$$

即

$$|\overrightarrow{PO}| = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PF_1}|^2 + 2\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} + |\overrightarrow{PF_2}|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{21 + 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

故选B.

本题属于圆锥曲线中线段求值问题,按照常规方法来做的的话,利用题中所给的一个角的余弦值,设未知量将其所在三角形的边表示出来,建立方程求出未知量,得到三条边的具体长度,再设点P的坐标,用两种方法表示出 $\triangle PF_1F_2$ 的面积,求出点P的纵坐标,再将其代入椭圆方程,求出横坐标,最后用两点间距离公式算出PO的长度。这种完全在平面几何中解题的方法计算量较大,较繁琐。如果想到构造向量的方法,就不需要考虑求出 PF_1 , PF_2 的长度,根据题设条件得出两条边长度之积以及平方和,利用向量中线公式与向量的模的运算就能求出答案。

在平面中构造向量,并不是说只要学生知道这种方法适用的固定题型,就能快速构造出向量来解题,而是学生根据题目条件,联想到了有关向量的知识,所以就想到用构造向量的方法。能用这个方法解决的题目往往蕴含着与向量有关的信息,比如看到复数的模,想到向量的模、坐标表示等知识点。

2.4 构造图形

在几何学中,构造图形是一种极具意义和价值的方法,主要是通过一系列精确的方法和步骤,根据给定的条件和要求,运用几何知识和工具,构造出各种具有特定特征和性质的图形。

在平面中,可以利用直尺和圆规,从最基本的点、线、面开始,逐步构建出三角形、四边形、圆形等各种常见的平面图形。这些图形的构造过程需要严密的逻辑思维和精准的操作,每一个步骤都需要遵循特定的几何定理和法则。

在三维空间中,构造图形则更加复杂和富有挑战性。需要综合考虑多个因素,如空间位置、角度、长度等,运用立体几何的相关证明知识和技巧,在棱柱、棱锥、球体等各种立体图形中构造出辅助线、辅助面等提高解题效率。通过构造图形,我们能够更直观地理解空间中物体的形状、结构和性质,从而进一步推进立体几何的研究和应用。

例9 如图2-4,在三棱锥A-BCD中,平面ABD $\perp$ 平面BCD, AB=AD, O为BD的中点。

(1) 证明: $OA \perp CD$;

(2) 若 $\triangle OCD$ 是边长为2的等边三角形,点E在棱AD上, $DE = 2EA$ 且二面角E-BC-D的大小为 45° ,求三棱锥A-BCD的体积。

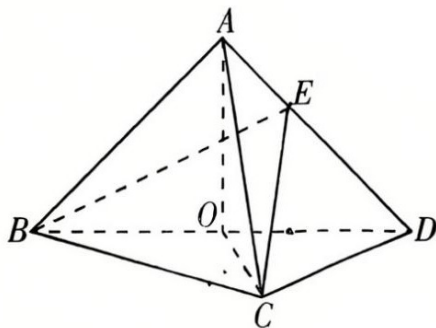


图 2-4 三棱锥

证 (1) 在 $\triangle ABD$ 中, 因为 $AB = AD$, O 为 BD 的中点, 所以 $AO \perp BD$.

又平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD = BD$, $AO \subset$ 平面 ABD ,

所以 $AO \perp$ 平面 BCD , 又 $CD \subset$ 平面 BCD , 所以 $OA \perp CD$.

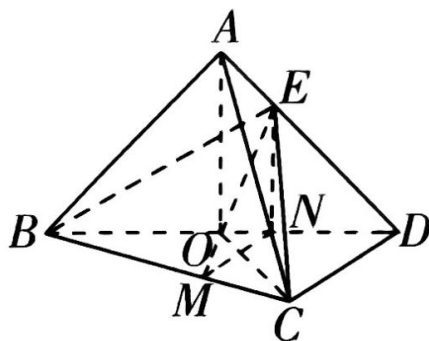


图 2-5 二面角辅助线

(2) 如图 2-5, 在 $\triangle ABD$ 中, 过 E 作 $EN \parallel AO$ 交 BD 于 N , 则由 $AO \perp$ 平面 BCD 得 $EN \perp$ 平面 BCD .

因为 $BC \subset$ 平面 BCD , 所以 $EN \perp BC$.

因为 $OB = OD = OC = 2$, 所以 $\angle BCD = 90^\circ$, 即 $DC \perp BC$.

在 $\triangle BCD$ 中, 过 N 作 $NM \parallel CD$ 交 BC 于 M , 则 $NM \perp BC$.

连接 EM , 因为 $BC \perp EN$, $BC \perp NM$, $EN \cap NM = N$,

所以 $BC \perp$ 平面 EMN , 又 $EM \subset$ 平面 EMN , 所以 $EM \perp BC$.

故 $\angle EMN$ 为二面角 $E-BC-D$ 的平面角。

又知二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45° ,

所以 $\angle EMN = 45^\circ$, $\triangle EMN$ 为等腰直角三角形。

又由 $DE = 2EA$ 得 $DN = 2NO$, 所以 $MN = \frac{2}{3}CD = \frac{4}{3} = EN = ND$, $AO = OD = 2$.

于是 $V_{A-BCD} = \frac{1}{3}S_{\triangle BCD} \cdot AO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} \times 2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

故三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

本题属于立体几何的证明与计算的综合题, 而构造辅助线是立体几何解题中常用的方法。本题的第二小题应用了构造图形的方法来解题, 要求三棱锥的体积, 我们需要求其底面积和高, 由题中已知的边的长度, 底面积很容易求得, 那么三棱锥的高就根据题中所给的二面角来求, 所以由二面角的定义构造一些辅助线形成一个直角三角形, 由已知的二面角度数算出直角三角形的边长, 求得三棱锥的高, 最后由三棱锥的体积公式求得体积。

一般立体几何大题的计算题都会优先选择构造向量的方法, 但是在这道题中, 由于平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 而且平面 BCD 是底面, 所以在图形中直接画出二面角的平面角比较方便。通过简单的计算就能求出所需的线段长度, 比构造向量法更高效。

例 10 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2$, 且 $\vec{b}$ 与 $\vec{b} - \vec{a}$ 的夹角为 30° , 则 $|\vec{b}|$ 的最大值为_____。

解 如图 2-6

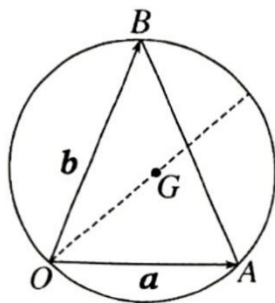


图 2-6 例 10

构造三角形 OAB , 在 $\triangle OAB$ 中, 令 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 则 $|\overrightarrow{OA}| = |\vec{a}| = 2$. 因为 $\vec{b}$ 与 $\vec{b} - \vec{a}$ 的夹角为 30° , 所以 $\angle OBA = 30^\circ$. 故点 A, O, B 均在一个半径为 R 的圆上, 记圆心为 G . $|\vec{b}|$ 的最大值即为圆 G 的直径。

由正弦定理可知,

$$\frac{|\overrightarrow{OA}|}{\sin \angle OBA} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 = 2R,$$

所以 $|\vec{b}|$ 的最大值为4.

本题看似考察的是求最值, 实际上也考察了学生数形结合的能力, 能否根据题设条件先自己构造出一个三角形, 利用向量的三角形法则将题设条件展现在直观的图形中. 再结合三角形外接圆的相关知识, 构造出一个圆, 而 $|\vec{b}|$ 也就转化为圆中一条弦的长度, 显然直径是圆中最长的弦, 所以由正弦定理我们可以快速求出外接圆的直径, 也就是 $|\vec{b}|$ 的最大值. 由此可见, 构造图形不仅局限于辅助线, 还可以是三角形、甚至是圆形. 除了三角形的外接圆, 看见直角或两直线垂直也可以联系圆的直径所对圆周角是 90° , 从而构造出一个圆.

如果学生没有想到构造圆, 也可以直接在三角形 AOB 中运用正弦定理先把 $|\vec{b}|$ 对应的线段表示出来, 即 $|\vec{b}| = 4 \sin \angle OAB$, 而 $\sin \angle OAB \leq 1$, 所以得到 $|\vec{b}| \leq 4$. 但是通过构造圆, 为解决求最值的问题提供了一种新的思路, 也是一种比较巧妙的方法, 有助于提升学生在解题过程中挖掘隐藏条件的能力.

3 结论

通过研究对构造法在高中数学各种题型中的应用, 我们可以发现构造法作为一种常用的数学方法, 在运用的过程中可以带动多种数学思想的融合发展, 例如化归与转化思想, 类比思想, 建模思想等等. 并且高中生在解题中多运用构造法解题有助于发展思维能力, 综合应用所学知识提高解题效率. 因此本文的第一部分是应用构造法的价值与意义, 简单地从四个方面说明了其意义与价值, 应用构造法不仅在解题方面对学生有直接的影响, 即拓宽解题思路, 提高解题效率, 而且在思维、知识、素养方面也有间接的影响. 第二部分从高中数学中常见的构造法出发, 对构造函数、构造方程、构造向量、构造图形这几种方法的含义和具体应用的解题步骤展开分析, 每一种构造法都用一个具体的例子来说明清楚, 用较为通俗的语言讲述解题的要点与步骤, 更有助于读者对构造法的理解.

上述例子都在说明在面对按照定向, 按照常规难以解决的情况下做出改变, 开拓更多的数学解题思维, 降低题目的难度, 使抽象的数学题目变得更加直观具象, 单一型转变为多角度, 有效提高数学解题的效率^[8].

参考文献

- [1] 石雪. 数学构造法在中学教学中的应用研究[D]. 宁夏: 宁夏师范学院, 2017: 32-33.
- [2] 任海莉. 浅谈构造法在数学解题中的优点和作用[J]. 科技资讯, 2011, 9(33): 166.
- [3] 中华人民共和国教育部制定. 义务教育数学课程标准 2022 年版[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 10-11.
- [4] 赵文庆. 核心素养视角下构造法在高中数学解题中的应用研究[D]. 宁夏: 宁夏师范学院, 2023: 24-36.
- [5] 杨贤红. 数学核心素养视域下中职生“方程思想”的培养策略[J]. 创新创业理论与实践, 2020, 3(16): 31-32.
- [6] 杨丽菲. 高中数学解题中应用构造法的实践尝试[J]. 科学大众(科学教育), 2018, 82(12): 7.
- [7] 马静. 构造法在高中数学中的应用研究[D]. 延安: 延安大学, 2020: 25-26.
- [8] 顾建华. 基于“构造法”的高中数学解题思路探索[J]. 科学咨询(教育科研), 2020, (42): 166.

版权声明: ©2026 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有. 本文章按照知识共享署名许可条款发表.

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

