

教育数学视角下复变函数的洛必达法则及其应用

曾晓晨

北京工业大学数学统计学与力学学院数学系 北京

【摘要】微积分中的洛必达法则是计算实函数的极限及证明 Taylor 公式的重要工具，但其证明依赖于 Cauchy 中值定理，而该定理对复变函数并不成立，故无法直接平行推广。本文在教育数学视角下，利用解析函数的级数展开建立相应的洛必达法则并给出完整证明。该理论成果将经典微积分中的洛必达法则推广至复分析领域，为计算解析函数的极限提供了有效工具；同时，其证明路径以核心命题串联解析性、级数展开、零点与极点等主干知识，显著降低认知门槛，对优化复变函数教学、促进学习者从套用结论到理解本质的转变具有重要教育价值。

【关键词】洛必达法则；复变函数；解析函数；极限；教育数学

【基金项目】国家自然科学基金（U25A20187）；北京高校青年教师创新教研工作室；北京工业大学教育教学研究课题资助（ER2024KCB21）

【收稿日期】2026 年 6 月 17 日 **【出刊日期】**2026 年 7 月 13 日 **【DOI】**10.12208/j.sdr.20260063

L' Hospital's rule for complex functions and its applications from the perspective of educational mathematics

Xiaochen Zeng

Department of Mathematics, School of Mathematics, Statistics and Mechanics,
Beijing University of Technology, Beijing

【Abstract】 The L' Hospital's rule in calculus is an important tool for calculating the limits of real functions and proving Taylor's formula. However, its proof relies on the Cauchy Mean Value Theorem, while does not hold for complex functions. Therefore, it cannot be directly extended in a parallel manner. From the perspective of educational mathematics, this paper uses the series expansions of analytic functions to establish the corresponding L' Hospital's rule and provides a complete proof. This theoretical achievement extends the L' Hospital's rule from classical calculus to the field of complex analysis, which provides an effective tool for calculating the limits of analytic functions. Simultaneously, its proof pathway, which weaves together core knowledge domains including analyticity, series expansions, zeros and poles via a central proposition, notably reduces the cognitive threshold. This bears significant educational value for optimizing the teaching of complex functions and facilitating learners' shift from the mere application of conclusions to the comprehension of their essence.

【Keywords】 L' Hospital's rule; Complex function; Analytic function; Limit; Educational mathematics

1 引言

在微积分的发展历程中，极限的计算始终是核心问题之一。实函数的洛必达（L'Hospital）法则是定理 1^[1]：设实变实值函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足下列条件：

(i) 在 x_0 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内可导且 $g'(x) \neq 0$ ；

计算函数极限、研究函数性质及证明 Taylor 公式的重要工具。尽管洛必达法则有各种不同的形式，但基本定理可叙述为：

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty;$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad (l \text{ 可取有限数或 } \infty),$$

则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

众所周知,实函数洛必达法则的证明依赖于微积分中的 Cauchy 中值定理^[1]。

在复分析中,极限的概念构成了复变函数的解析性及积分理论的基石。与实函数不同,复变函数极限的存在性要求路径无关性(即沿复平面内任意趋近路径的极限均一致),这一苛刻条件使得复极限运算不仅是一个计算工具,更成为研究函数解析性质的本质特征探测器^[2-4]。简言之,复变函数极限的存在性与计算贯穿了整个复变函数论的构建过程。

另一方面,由于 Cauchy 中值定理对复变函数并不成立,因而无法将实函数的洛必达法则平行地推广到复变函数情形。例如,设 $f(z) = e^{iz}$, $g(z) = z$, 则复变函数 $f(z)$, $g(z)$ 在整个复平面连续、解析且满足 $f(0) = f(2\pi) = 0$, $g'(z) = 1 \neq 0$ 。注意到 $\frac{f(2\pi) - f(0)}{g(2\pi) - g(0)} = 0$, 而 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = ie^{i\xi}$ 处处非零,故 Cauchy 中值定理对复变函数不成立。

教育数学^[5]是由我国著名数学家张景中院士率先提出并系统发展的数学教育理念,其核心思想在于:为了教学与学习的需要,对数学内容本身进行重构、简化与再创造,使数学概念更平易、推理更简洁、体系更适合学生认知规律,从根本上解决数学“难教、难学”的问题。

复变函数论中的洛必达法则虽然在部分教材中以正文或习题的形式有所涉及^[2,6-9],但均未给出系统严谨的证明,且通常仅局限于对经典“0/0型”不定式极限情形的讨论。在教育数学的视角下,复变函数论中洛必达法则的证明具有重要教育价值。它不仅能严格夯实解析函数、极限、级数展开等基本理论,还能打通实分析与复分析之间的思想联系,避免知识碎片化;同时,可在严谨推理中实现对数学结构的主动建构,降低复变函数的抽象难度,真正体现教育数学“化难为易、以简驭繁、促进理解”的根本追求。

本文首先针对解析函数在固定点处“0/0型”未定式极限的情形建立相应的洛必达法则,并通过典型算例验证其有效性与计算优势;进一步,研究“ ∞/∞ 型”未定式极限的复变函数推广形式,并分析复变函数的洛必达法则与经典实变函数情形的内在联系与本质差异。

2 解析函数“ $\frac{0}{0}$ 型”的洛必达法则

本节研究复变函数论中解析函数“0/0型”未定式极限的洛必达法则。

匡蛟勋教授和田红炯教授在文献[7]中针对解析函数的“0/0型”未定式证明了一个简洁的洛必达法则,具体形式如下:

定理 2^[7]: 设 $f(z)$, $g(z)$ 是区域 D 内的解析函数, $z_0 \in D$, $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $\lim_{z \rightarrow z_0} g'(z) \neq 0$, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$ 存在,

则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

证: 因为 $f(z_0) = g(z_0) = 0$, 故

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}. \quad (1)$$

最后的极限是存在的, 因为 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在 z_0 的某邻域内解析且 $g'(z_0) \neq 0$. 证毕.

上述定理的结论正确, 这表明洛必达法则适用于计算解析函数的“0/0 型”未定式极限. 该定理的完整表述及其证明详见文献[7]第 3.2 节《导数的初步应用》. 需要特别指出的是, 仅凭复变函数导数的定义、解析性的基本概念以及一般求导法则, 尚不足以完成定理 2 的严谨证明. 关键之处在于证明过程中的 (1) 式须依赖于解析函数的导函数连续这一重要性质, 即

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f'(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g'(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

因此, 定理 2 及其证明过程应在介绍复变函数的 Cauchy 积分公式及其推广——《高阶导数公式》之后给出, 即先证明解析函数的导数仍然解析, 再推出其导函数连续才可严谨地证明该结论.

另一方面, 定理 2 的结论略显局限. 因为定理假定了 $g'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} g'(z) \neq 0$ 且 $f'(z)$ 在 $z = z_0$ 处解析, 所

以存在 $l \in \mathbb{C}$, 使得 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = l$. 这意味着 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$ 存在自动成立, 无需在定理中作极限存在的假定. 应该

指出的是定理 2 的洛必达法则只适用于极限存在的未定式, 并未讨论 $l = \infty$ 的情形.

若将复变函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的解析性条件减弱, 则下述推论成立.

推论 1: 设复变函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 $z = z_0$ 处可导且满足 $f(z_0) = g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

平行于微积分中实函数“0/0 型”未定式极限的洛必达法则, 定理 3 针对解析函数的“0/0 型”未定式极限给出相应的洛必达法则. 相较于定理 2, 值得指出的是该结论适用于极限存在或发散于 ∞ 的任意情形.

定理 3: 设复变函数 $f(z), g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒为零的解析函数, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

证: 设 z_0 分别是解析函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 m ($m \geq 1$) 级零点与 n ($n \geq 1$) 级零点, 则

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z), \quad g(z) = (z - z_0)^n \psi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 均在 z_0 解析且满足 $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) \neq 0$.

另一方面, 根据求导法则, 易见:

$$\begin{cases} f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} \varphi(z) + (z - z_0)^m \varphi'(z) \\ \quad = (z - z_0)^{m-1} [m\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)], \\ g'(z) = n(z - z_0)^{n-1} \psi(z) + (z - z_0)^n \psi'(z) \\ \quad = (z - z_0)^{n-1} [n\psi(z) + (z - z_0)\psi'(z)]. \end{cases}$$

于是,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{m-n} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

且

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = (z - z_0)^{m-n} \frac{m\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)}{n\psi(z) + (z - z_0)\psi'(z)}.$$

当 $m > n$ 时, 因为 $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) \neq 0$, 所以 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m-n} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = 0$, 即 z_0 是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

另一方面, 由于 $\varphi'(z), \psi'(z)$ 解析, 从而 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0)^{m-n} \frac{m\varphi(z) + (z - z_0)\varphi'(z)}{n\psi(z) + (z - z_0)\psi'(z)} \right] = 0$.

于是, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = 0$;

当 $m = n$ 时, z_0 是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 和 $\frac{f'(z)}{g'(z)}$ 的可去奇点. 故 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}$;

当 $m < n$ 时, z_0 是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 和 $\frac{f'(z)}{g'(z)}$ 的 $n - m$ 级极点. 所以, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \infty$.

因此, 针对解析函数“0/0型”未定式, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$ 对极限存在或发散于 ∞ 均成立. 证毕.

推论 2: 若 z_0 仍是 $f'(z)$ 和 $g'(z)$ 的零点, 因为 $f'(z)$ 和 $g'(z)$ 仍解析, 所以可继续使用定理 3 计算极限,

即: $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f''(z)}{g''(z)}$.

利用定理 3 或推论 2 可以快速计算下述极限。

例 1: 计算 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - z \cos z}{z^3}$.

解: 原式 $= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - \cos z + z \sin z}{3z^2} = \frac{1}{3} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{3}$.

事实上, 该极限亦可应用 Taylor 展式求解, 但相较于上述计算过程稍显繁琐。

例 2: 判定 0 是函数 $f(z) = \frac{1}{\cos z - 1} + \frac{2}{z^2}$ 的什么型奇点?

解: 因为 $f(z)$ 在圆环域 $0 < |z| < \delta$ 的 Laurent 展式十分复杂, 故尝试通过计算极限来判断奇点类型。易见:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos z - 1} + \frac{2}{z^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 2(\cos z - 1)}{z^2(\cos z - 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 2(\cos z - 1)}{-\frac{z^4}{2}}.$$

故原极限化为“0/0型”未定式。应用两次定理 3, 上式化为:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos z - 1} + \frac{2}{z^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \sin z}{-z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{-3z^2} = -\frac{1}{6}.$$

因此, $z = 0$ 为函数 $f(z)$ 的可去奇点。

3 解析函数“ $\frac{\infty}{\infty}$ 型”的洛必达法则

平行于定理 3, 本节研究解析函数“ ∞/∞ 型”未定式极限的洛必达法则。

定理 4: 设复变函数 $f(z), g(z)$ 在 z_0 的某去心邻域内解析且满足 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \infty$, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

证: 类似于定理 3, 设 z_0 分别是解析函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 m ($m \geq 1$) 级极点与 n ($n \geq 1$) 级极点, 则

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} P(z), \quad g(z) = (z - z_0)^{-n} Q(z),$$

其中函数 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 在 z_0 解析且满足 $P(z_0) \neq 0, Q(z_0) \neq 0$. 从而

$$\begin{cases} f'(z) = \frac{(z - z_0)P'(z) - mP(z)}{(z - z_0)^{m+1}}, \\ g'(z) = \frac{(z - z_0)Q'(z) - nQ(z)}{(z - z_0)^{n+1}}. \end{cases}$$

$$\text{进一步, } \frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{n-m} \frac{P(z)}{Q(z)} \text{ 且 } \frac{f'(z)}{g'(z)} = (z - z_0)^{n-m} \frac{(z - z_0)P'(z) - mP(z)}{(z - z_0)Q'(z) - nQ(z)}.$$

当 $n > m$ 时, 容易发现 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = 0$, 即 z_0 是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 和 $\frac{f'(z)}{g'(z)}$ 的可去奇点; 类似地, 当 $n = m$ 时,

z_0 是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 和 $\frac{f'(z)}{g'(z)}$ 的可去奇点. 所以, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{P(z_0)}{Q(z_0)}$; 当 $n < m$ 时, z_0 是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 和 $\frac{f'(z)}{g'(z)}$ 的

$m - n$ 级极点. 故 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \infty$.

因此, 针对解析函数的 “ ∞/∞ 型” 未定式, $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$ 对极限存在或发散于 ∞ 均成立. 证毕。

注记 1: 定理 3 和定理 4 表明, 洛必达法则同样适用于解析函数 “0/0 型” 和 “ ∞/∞ 型” 的未定式极限的计算, 因而它们可看作实函数洛必达法则在复变函数论中对解析函数的一类自然推广。

注记 2: 值得注意的是, 定理 3 和定理 4 的证明过程相较于微积分中实函数的洛必达法则更为简洁. 这一简化主要源于复变函数解析性所蕴含的强正则性: 在证明过程中, 我们无需借助类似 Cauchy 中值定理等实分析中的工具. 究其本质, 这是因为复变函数的解析性条件 (即在某邻域内处处可导) 较实函数仅在去心邻域内可导的条件具有更强的约束性, 这种更强的正则性使得复变函数具有更优的分析性质, 从而简化了定理的证明过程. 无论是 “0/0 型” 亦或是 “ ∞/∞ 型” 的洛必达法则, 其证明过程均严格依赖于复变函数的解析性。

注记 3: 在教育数学的视角下, 定理 3 和定理 4 的证明过程优先选择最体现学科本质的证明路径, 而非机械地移植实分析的方法. Taylor 级数或 Laurent 级数作为复变函数的 “身份证”, 既是工具也是概念骨架, 用它们表示解析函数并进一步证明洛必达法则, 能让学习者同时巩固解析函数、零点与极点及局部线性逼近三大核心概念. 另一方面, 一个 “好的证明” 应当揭示而非掩盖内在的数学结

构. 运用级数展开表示解析函数, 进而证明复变函数中的洛必达法则, 看似仅是一项技术性选择, 实则是一次深刻的教育数学实践. 具体而言, 这一处理方式首先成功规避了复变函数中值定理的适用性困境, 显著降低了认知门槛; 其次, 它凸了解析函数的局部线性性质, 有效强化了核心概念的理解; 更重要的是, 它将极限、导数、解析性、级数展开以及零点与极点等关键概念有机融合为一体, 系统性地揭示了复变函数论内在的统一图景。

4 结论

本文证明了复变函数论中的洛必达法则, 其适用于计算解析函数在固定点处的 “0/0 型” 和 “ ∞/∞ 型” 未定式极限, 主要结果详见定理 3 和定理 4. 该结论不仅推广了经典微积分中的洛必达法则, 而且为复变函数极限的计算提供了强有力的工具, 进而可广泛应用于解析函数的奇点性质研究、留数计算等复分析领域的重要问题。

从张景中院士提出的教育数学理念来看, 复变函数洛必达法则的证明是实现数学知识逻辑化、简约化与系统化的重要实践. 它以严谨推导夯实复分析理论基础, 打通实分析与复分析的思想关联, 以核心命题串联复变函数的解析性、级数展开、极限、零点与极点等主干知识, 降低学习抽象难度, 引导

学习者实现从套用结论到理解本质的转变,对优化数学认知结构、提升数学思维素养具有重要意义。

参考文献

- [1] 刘玉莲等. 数学分析讲义: 上册[M]. 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 167-187.
- [2] 王绵森. 复变函数[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2020: 15-24, 131.
- [3] 周性伟, 张震球, 王险峰. 复变函数[M]. 北京: 科学出版社, 2022: 11-20.
- [4] 张继龙, 李升, 陈宝琴译/J. W. Brown, R. V. Churchill 著. 复变函数及应用(原书第 9 版)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2015: 35-69.
- [5] 张景中, 曹培生. 从数学教育到教育数学[M]. 北京: 中国少年儿童出版社, 2005: 204-217.
- [6] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2021: 22-30, 129-151.
- [7] 匡蛟勋, 田红炯. 复分析及其在数值数学中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 29-84.
- [8] 李红, 谢松法. 复变函数与积分变换[M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 116.
- [9] 张建国. 复变函数与积分变换[M]. 北京: 机械工业出版社, 2020: 124.

版权声明: ©2026 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS