运用数形结合策略解高考数学题例析

杨欣怡

扬州大学　江苏扬州

【摘要】数形结合策略作为一种综合运用数学和几何图形的解题方法，具有很强的实用性和灵活性，在高中数学中较为重要，它能够将数与形很好的结合在一起。因此，学生在学习的过程中熟练地利用数形结合策略不仅能够帮助学生更好地理解数学概念，还能帮助学生以更快的速度解决各种数学问题，还能够大大提升其抽象思维和空间想象力。本文将从数形结合的内涵、数形结合在高中数学中的作用出发，并且利用高考数学中三种不同类型的题目为例，探讨数形结合策略在解题中的运用，旨在帮助学生理解和应用数形结合策略，更好地理解数学概念，提高数学问题解决能力。

【关键词】数形结合；高考数学；思想方法

【收稿日期】2023 年 11 月 8 日　　**【出刊日期】**2023 年 12 月 15 日　　**【DOI】**10.12208/j.aam.20230022

An example analysis of solving the mathematical problems of college entrance examination using the combination of number and form strategies

Xinyi Yang

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 As a method of solving problems using mathematics and geometric figures comprehensively, the combination strategy of number and shape has strong practicability and flexibility, and is more important in high school mathematics. It can combine number and shape well. Therefore, students' skillful use of the combination of number and form in the learning process can not only help students better understand mathematical concepts, but also help students solve various mathematical problems at a faster speed, and greatly improve their abstract thinking and spatial imagination. This paper will start from the connotation of the combination of number and form, the role of the combination of number and form in high school mathematics, and take three different types of math questions in the college entrance examination as examples to discuss the application of the combination of number and form strategies in solving problems, aiming to help students understand and apply the combination of number and form strategies, better understand mathematical concepts, and improve mathematical problem-solving ability.

【Keywords】 Combination of number and form; College entrance examination mathematics; Thinking method

华罗庚曾有诗云：“数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞。数缺形时少知觉，形少数是难入微。数形结合百般好，隔离分家万事非。切莫忘几何代数统一体，永远联系，切莫分离。”这首诗言简意赅地说明了数形结合的重要性。数是形的抽象概括，形是数的直观表现[1]，利用数字可以更准确地描述和量化图形的特征，利用图形可以更直观地表现出数量之间的关系。本文将深入考察并分析数形结合这一有效方法在近几年的高考数学客观题中的应用。

1 数形结合思想的内涵

数形结合思想，就是根据数与形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的思想，包括“以形助数”和“以数辅形”两个方面[2]。数形结合思想的基本思路是将抽象的数学概念与具体的几何图像相联系，通过几何图形的可视化来帮助学生理解和解决数学问题。包括以下几个方面：图形与数学模型之间

的转化、数学方法的几何解释、数学问题中的几何化、数学规律的几何观察等。

2 数形结合思想在高中数学中的作用

数形结合思想作为中学数学中的一种重要数学思想，在强化概念理解、提升解决问题能力等方面具有重要的意义和作用。

2.1 帮助学生理解抽象概念

高中数学中的一些概念和公式通常都比较抽象，学生难以理解，但通过与几何图形相结合，利用数形结合就能够将抽象的知识点转化成具体的图形，知识点是学生建构数学知识的框架，学生掌握关键知识要领，就能掌握整体知识结构，从而提高知识的构架[3]。例如，代数中的函数，函数的概念通常晦涩难懂，但是通过观察函数的图像，学生可以更容易理解函数的概念以及相关的性质。通过将代数中的函数转化为几何图形，学生可以直观地观察函数的变化趋势和特征。函数的图像呈现了自变量与因变量之间的关系，通过观察图像的形状、斜率、极值点等性质，学生可以更加深入地理解函数的概念，如定义域、值域、单调性、奇偶性等。

2.2 帮助学生探索解题方法

学生通过数形结合，将问题抽象化，再转化成几何图形，可以帮助学生更加直观地观察和分析问题。通过观察和分析几何图形呈现出的形状、关系等，可以快速调用出记忆中相关的公式或定理，可以帮助学生提高提高解题的效率。这一思想的应用还可以帮助学生在解决数学问题时更好地理解题目所要求的信息和条件，通过将数学概念与几何图形相结合，学生可以更加直观地看到问题中的图形特征和数学关系，通过研究图形的形状、大小、角度以及各个部分之间的关系，例如对称性、相似性、等量关系等，学生可以发现并提取出隐藏在题干中的有效信息，从而有利于学生探索解题策略，提高解题效率。

2.3 帮助学生培养思维能力

数学学习对学生的思维能力有着极高的要求，良好的思维能力是学生学好数学的关键[4]。数形结合思想可以培养学生的逻辑思维能力，学生通过观察和分析几何图形的特征、性质和变化规律，以及与之相关的数学概念之间的关系来解决问题，通过数形结合，学生被激发出运用逻辑思维解决问题的需求，从而锻炼和提高他们的逻辑思维能力。数形结合思想还可以培养学生的创造性思维，几何图形本身具有多样性和多变性的特征，通过观察和分析图形的变化规律，学生能够产生新的想法和创造新的解决方法，从而提高他们的创造性思维能力。

3 数形结合思想在高考数学客观题解题过程中的应用案例

通过对近几年的全国高考卷进行分析，发现在不同类型的题目中都会出现对数形结合思想的考察，主要以客观题为主。

3.1 函数图形问题

函数图形问题是高中数学教学的重要内容，如果仅仅通过题干的信息及对数学公式的运算，我们很难将抽象的知识转化为容易理解的直观形象，从而轻松地找到题目的正确解[5]。只有在解决函数题目的时候，联系函数的图像，思考函数图像中的几何特征，并将函数图像中的几何性质和数量关系联系起来，才能帮助我们寻找到正确解。

例 1 （2023 年全国甲卷（文科））函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像由 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到，则 $y=f\left(x\right)$ 的图像与直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的交点个数为（　　）

A、1　　B、2　　C、3　　D、4

解析：因为 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位所得函数为 $y=\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 2x$，

所以$f(x)=-\sin 2x$，而$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$显然过点$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$和点（1,0），作出$f\left(x\right)$与$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的部分大致图像如图 1。

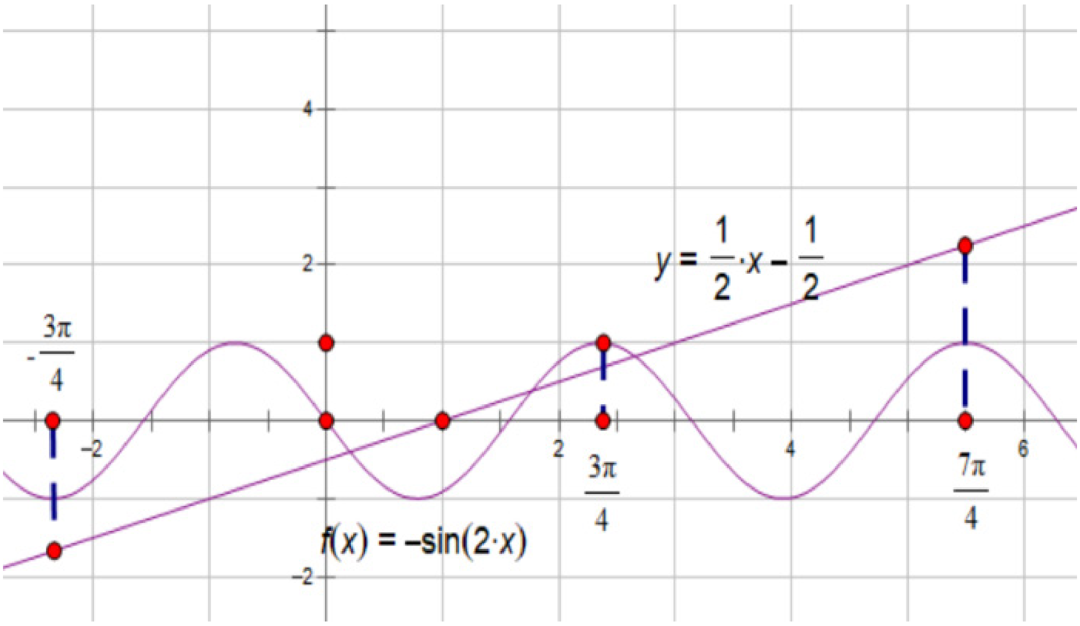

图 1

考虑$2x=-\frac{3\pi}{2}$，$2x=\frac{3\pi}{2}$，$2x=\frac{7\pi}{2}$，即$x=-\frac{3\pi}{4}$，$x=\frac{3\pi}{4}$，$x=\frac{7\pi}{4}$处$f(x)$与$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的大小关系，

当$x=-\frac{3\pi}{4}$时，$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=-1$，$y=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{3\pi+4}{8}<-1$，

当$x=\frac{3\pi}{4}$时，$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\frac{3\pi}{2}=1$，$y=\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3\pi-4}{8}<1$ ，

当$x=\frac{7\pi}{4}$时，$f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\sin\frac{7\pi}{2}=1$，$y=\frac{1}{2}\times\frac{7\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{7\pi-4}{8}>1$，

所以由图可知，$y=f(x)$与$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的交点个数为 3.故选 C

点评：本题考察的是两个图像的交点问题，如果按照常规作差的方法去求解会很麻烦，因为作差后的函数由两种函数组成，无法简单的去判断其增减性以此来判断交点的个数。而将两个图像分别画出，再去判断其函数值的大小较为容易。

例 2 （2023 年全国甲卷（文科）） 若 x，y 满足约束条件$\begin{cases}3x-2y\le 3\\-2x+3y\le 3\\x+y\ge 1\end{cases}$，则$z=3x+2y$的最大值为：

解析：根据题目的要求绘制出约束条件的可行域，如图 2 所示，

由图 2 可知，当目标函数$y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{2}$过点 A 时，Z 有最大值，由$\begin{cases}-2x+3y=3\\3x-2y=3\end{cases}$可得$\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$，即 A（3,3），

所以$z_{\max}=3\times3+2\times3=15$，故答案为：15

点评：按照常规思路，可以将本题所给的约束条件求解出来，然后再去求解目标函数的最值。但由于目标函数中有两个未知数，在考虑最值问题的时候还需要考虑是否能够同时取得。将约束条件所涉及的函数图像画出，则可以清晰地描述出目标函数所在范围，从而求得最值。

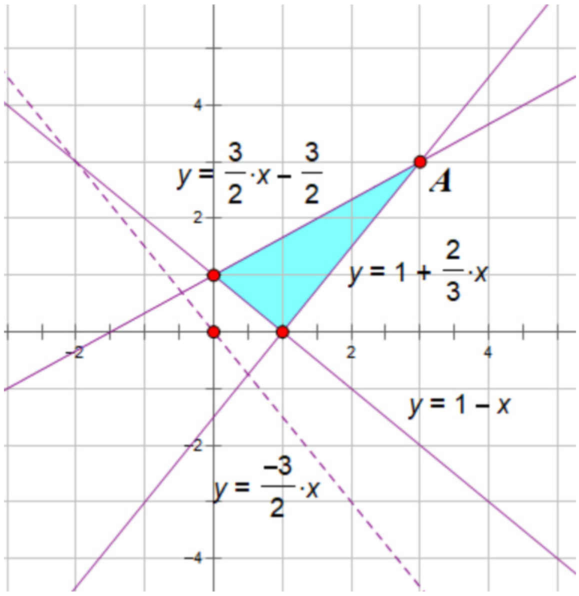

图 2

3.2 向量问题

向量是代数与几何的交汇点，兼具了代数和几何的双重特征[6]，因此在解决向量问题的时候利用向量的几何特征去探究其代数特征是一种较为简单高效的方法。

例 1 （2023 年全国甲卷（理科））向量$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = -1$，$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{2}$，且$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则$\cos\left(\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\right)=$（ ）

A、$-\frac{1}{5}$ B、$-\frac{2}{5}$ C、$\frac{2}{5}$ D、$\frac{4}{5}$

解析：根据题目$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$得$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$，即$\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{c}^2$，即$1+1+2\vec{a}\bullet\vec{b}=2$，所以$\vec{a}\bullet\vec{b}=0$。如图 3，设$\overline{OA}=\vec{a}$，$\overline{OB}=\vec{b}$，$\overline{OC}=\vec{c}$

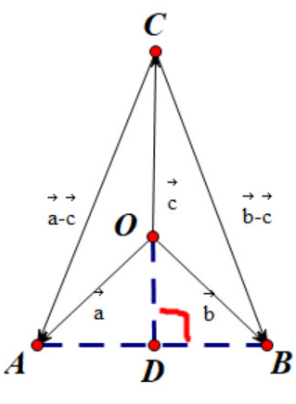

图 3

由题得，$OA=OB=1$，$OC=\sqrt{2}$，ΔOAB 是等腰直角三角形，AB 边上的高 $OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以

$CD=CO+OD=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\tan\angle ACD=\frac{AD}{CD}=\frac{1}{3}$，$\cos\angle ACD=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\left(\vec{a}-\vec{b},\vec{b}-\vec{c}\right)=\cos\angle ACB$

$$=\cos 2\angle ACD=2\cos^2\angle ACD-1$$
$$=2\times\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2-1=\frac{4}{5}$$

故选 D

例 2（2023 年全国乙卷（文科））正方形 ABCD 的边长是 2，E 是 AB 的中点，则 $\overrightarrow{EC}\bullet\overrightarrow{ED}=$（　）

A、$\sqrt{5}$　　B、3　　C、$2\sqrt{5}$　　D、5

解析：如图 4，以 A 为坐标原点建立平面直角坐标系

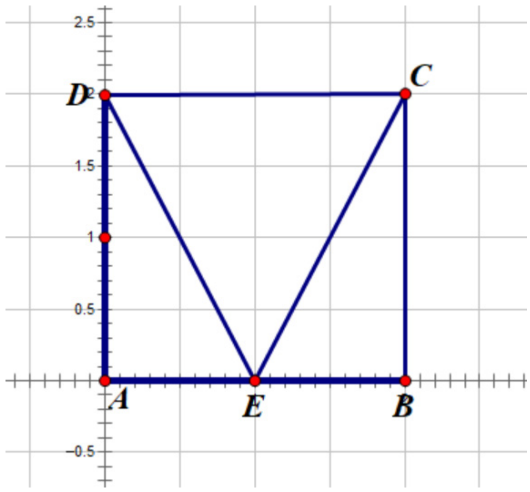

图 4

则 E（1,0），C（2,2），D（0,2），可得 $\overrightarrow{EC}=(1,2)$，$\overrightarrow{ED}=(-1,2)$，所以 $\overrightarrow{EC}\bullet\overrightarrow{ED}=1\times(-1)+2\times2=3$，故选 B

点评：将向量问题转化为图形问题是最方便的求解方法，因为向量的学习就是从图形出发的，所以上述两道向量题只有转化成图形问题才能够帮助学生建立数量之间的关系，从而快速锁定答案。

3.3 解析几何图形问题

在解决解析几何问题时，如果题目全部由文字构成，学生仅凭借自己的想象是很难确定题目多表达的内容[7]。因此，在做这类题目的时候，借助几何图形就能够很直观的在图中看到题目所表达的信息，从而利用相关知识求解此类题目。

例 1 （2023 年全国新高考Ⅰ卷）过点（0，-2）与圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为 α，则 $\sin\alpha=$（）

A、1　　B、$\frac{\sqrt{15}}{4}$　　C、$\frac{\sqrt{10}}{4}$　　D、$\frac{\sqrt{6}}{4}$

解析：根据题目可以将圆 C 的方程 $x^2+y^2-4x-1=0$ 化简为 $(x-2)^2+y^2=5$，则该圆的圆心为（2,0），半径 $r=\sqrt{5}$，设 $\angle CPA=\theta$，则 $\alpha=2\theta$，如图 5 所示，

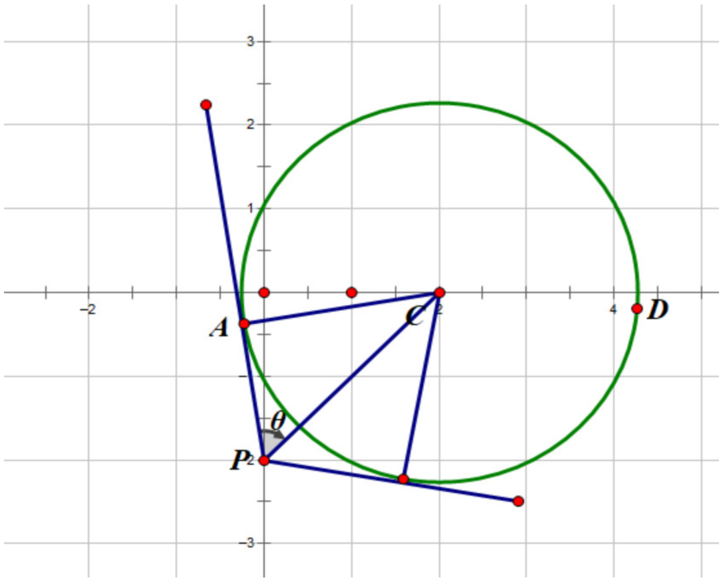

图 5

$\sin\theta=\frac{CA}{CP}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$，则$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$，所以$\sin\alpha=\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$，故选 B

点评：本题的求解关键是利用题目所给条件在图形中找到$\sin\alpha=\sin 2\theta$的关系，如果只靠题目中的文字说明，学生很难想到角的关系。

例 2 （2023 年全国新高考 II 卷）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$的左，右焦点分别为F_1,F_2，直线$y=x+m$与 C 交于点 A，B 两点，ΔF_1AB面积是ΔF_2AB的 2 倍，则 m=（ ）

A、$\frac{2}{3}$　　B、$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C、$-\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D、$-\frac{2}{3}$

解析：由题得，椭圆 C 如图 6 所示

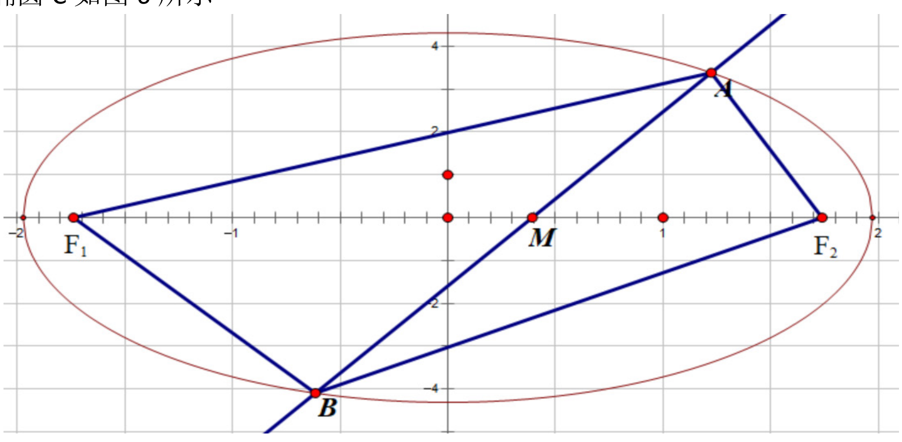

图 6

设直线与 X 轴交点为 M，因为ΔF_1AB面积是ΔF_2AB的 2 倍，可得$F_1M=2MF_2$，又因为椭圆中$c^2=a^2-b^2=2$，

所以$F_1F_2=2\sqrt{2}$，可得 M 点坐标为$\left(\frac{\sqrt{2}}{3},0\right)$，代入直线$y=x+m$中可得$m=-\frac{\sqrt{2}}{3}$，故选 C

点评：本题的求解关键是将“ΔF_1AB面积是ΔF_2AB的 2 倍”转化成数学语言，三角形的面积表达式有多种，而在本题中具体选择哪一种表达方式，从而推出边的关系，仅仅通过文字是看不出来的，所以此时需要利用图形来判断选择哪种表达式以最便捷的方式将面积的倍数关系转化为边的倍数关系。

综上所述，在高考试卷中经常会使用到数形结合这一重要思想，尤其是在解决选择、填空题时发挥着很大的作用。因此，在高考中，学生若能灵活使用该思想，便能大幅提升解题效率，锻炼思维的灵活性。

参考文献

[1] 陈上太.巧用数形结合法解答高考题[J].高考,2020(04):157-158.

[2] 陈俊斌.巧用数形结合思想,妙解高考数学客观题[J].中学数学研究,2015(07):25-27.

[3] 刘建国. 浅谈高中数学教学中数形结合的运用[A]. 华教创新（北京）文化传媒有限公司、中国环球文化出版社.2022 教育教学现代化精准管理高峰论坛论文集（高中教育篇）[C].华教创新（北京）文化传媒有限公司、中国环球文化出版社:华教创新(北京)文化传媒有限公司,2022:305-310.

[4] 沈娇娇.数形结合思想在初中数学教学中的渗透[J].安徽教育科研,2022(27):61-62+71.

[5] 高文龙.巧用数形结合思想——妙解高考数学客观题[J].数学学习与研究,2020(08):126.

[6] 孔繁晶.例谈数形结合解决向量问题[J].考试周刊,2017(51):134.

[7] 季国平.关于高中数学几何解题技巧之“数”“形”结合策略[J].新课程(下),2018,No.444(04):96.