巧用构造法妙解代数题例析

贺世凯

扬州大学 江苏扬州

【摘要】代数作为数学的一个专有名词，在中学数学中占有极其重要的地位，也是中学数学学习的主要部分，该类题目抽象繁琐，灵活多变，知识点环环相扣。本文从代数角度出发，通过分析近年中高考和初高中数学竞赛以及各地模拟试题，归纳整理出几种利用构造法求解代数题的方法，希望这篇文章能对解决中学代数问题提供一些帮助。

【关键词】构造；代数；转化

【收稿日期】2023年7月21日 【出刊日期】2023年9月15日 【DOI】10.12208/j.aam.20230015

Skillfully use the construction methods to solve algebraic problems

Shikai He

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】Algebra is a proper term in mathematics, and it plays a significant role in middle and high school mathematics. It is also the main part of junior and senior school mathematics study. Algebra problems are abstract, complicated, flexible and changeable. The knowledge of algebra is also interlinked. By analyzing the junior and senior school entrance examination, the mathematics competition of middle and high school and the simulation test questions from different regions in recent years, this paper sums up several methods of solving algebraic problems with the construction methods. I hope this article can provide some help to solve the problems of middle and high school algebra.

【Keywords】Construct; Algebra; Transform

在中学数学中，知识点星罗棋布、繁星点点。初中代数包含代数式、实数、函数初步、不等式、方程、统计初步等知识，这与高中数学所包含的函数与几何、基本初等函数、数列、统计与概率、基本不等式、复数、三角函数、导数与极限等知识有着紧密直接的联系。

构造法在众多代数难题和竞赛题中经常见到它的身影，其灵活多变，思路巧妙，解法精湛，往往能将问题化繁为简。在利用构造法求解一些难度较高的代数题时，应先观察题目特征、联想相关知识、类比推理才能跳出题外，高屋建瓴，柳暗花明。反过来，学生在利用构造法解决代数或实际问题的过程中，其建模能力、构造能力也在潜移默化中得到提升，两者相辅相成，进一步培养学生的数学思维和解题能力。本文笔者围绕几种常见的构造方法，探究构造法在解代数题中的妙用，给读者提供一些参考价值。

1 构造法及其实质

构造法，顾名思义，主要是依据已有的条件与结论之间的关系，进行推理，构造满足题目结论的数学对象，并通过新构造出来的数学对象高效、简便地解决较为复杂数学问题的方法[1]。它具有直观性、不确定性、多样性、灵活性和可操作性。

构造法作为一种数学方法，它是将题设条件与待证结论搭建起一种沟通作用的具有创造性的方法。其本质特征就是“构造”，而利用构造法求解代数题的关键在于根据题目需要构造出与题设条件相关但没有给出（或隐藏在题设条件中）的数、代数式、方程、函数、不等式、图形或者命题等。

2 几种常见的构造方法

2.1 构造方程

方程是刻画现实世界数量关系、联系“已知”与“未知”的重要数学模型。它在解题中是一种重要的工具，在很多数学问题，通过观察通过它们的数量关系，可以架起“已知”与“未知”的桥梁，建立起方程，从而使问题变得迎刃而解。

例 1：（2002 年湖北省武汉市初中数学竞赛）已知 x^3+ax^2+bx+8 有两个因式 $x+1$ 和 $x+2$，求 $a+b$。

分析：通过观察，x^3+ax^2+bx+8 是一个 3 次 3 项式，因为题设条件告诉我们有两个因式 $x+1$ 和 $x+2$，根据 3 次 3 项式的定义，我们不妨设另外一个因式为 $x+c$，则有：

$$x^3+ax^2+bx+8=\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+c\right)=x^3+\left(c+3\right)x^2+\left(3c+2x\right)+2c$$

通过观察等式两边可得：$\begin{cases}a=c+3\\ b=3c+2,\\ 8=2c\end{cases}$ 化简可求出 $a+b=21$。

2.2 构造函数

函数作为一种重要的数学模型，不仅可以用来描述事物的变化情况，而且初高中的一个重要的概念和知识点，函数的思想和方法贯穿了中学的全部数学内容，在中高考中起着举足轻重的作用。

构造函数是指借助构造辅助函数达到对某一种或某一类问题的求解的一种方法。若涉及到证明不等式、最值问题、求自变量的取值范围等问题，我们往往倾向于构造辅助函数，利用函数的定义域、单调性、奇偶性、值域、连续性、有界性等性质加以分析判断，合理地构造相应的函数并利用所构造的函数特点和性质来巧妙地解决问题。

例 2： 已知 $f\left(x\right)=x\ln x-ax$， $g\left(x\right)=-x^2-2$，试证 $\forall x\in\left(0,+\infty\right)$， $\ln x+1>\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{2}{ex}$。

分析：要证不等式 $\ln x+1>\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{2}{ex}$，如果我们将式子全部移到左边，我们很难判断函数 $y=\ln x+1-\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{2}{e}$ 的单调性，进而很难求出其最小值。我们不妨将不等式左右两边分开来进行单独分析，将问题转化为求解函数最值问题，分别求出左右两边函数的最值，然后再进行判断。

证明：将不等式左右两边同时乘以 x 可得 $x\ln x+x>\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{2}{e}$，

设 $p\left(x\right)=x\ln x+x, q\left(x\right)=\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{2}{e}$，则 $p'\left(x\right)=1+\ln x+1=\ln x+2,$

令 $p'\left(x\right)>0$，则 $x>\dfrac{1}{e^2}$。

$\therefore$ $p\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{e^2}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\dfrac{1}{e^2},+\infty\right)$ 区间上单调递增，

则 $p(x) > p(x)_{\min} = p\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{1}{e^2}$，

同理，我们可得出 $q(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，因而 $q(x)$ 有最大值，

于是 $q(x) \le q(x)_{\max} = q(1) = -\frac{1}{e}$，所以 $p(x)_{\min} > q(x)_{\max}$，

则 $\forall x \in (0,+\infty), p(x) \ge p(x)_{\min} > q(x)_{\max} \ge q(x)$，故所证不等式成立。

评注：该方法的思路分别对不等式左右两边的式子进行处理，将较复杂的不等式两边分解成两个简单的函数，再通过进行求导求出两边函数的最值进而进行判断。但这种方法具有较强的局限性，需要保证不等式 $f(x)_{\min} > g(x)_{\max}$ 成立，否则不易进行判断求证。

2.3 构造不等式

不等式是中学数学中常见的题型，作为一大分支，近几年来，在新课改的背景下，各类不等式问题层出不穷，在中高考、数学竞赛中非常热门，常常作为压轴题出现，譬如导数、三角函数、最值问题，甚至在一些几何证明题也会运用到不等式的知识。灵活应用不等式，就可以轻而易举的解决大多数数学问题。一般不等式问题可以围绕最值问题、不等式证明等来出题，针对此类问题，均值不等式、柯西不等式是研究此类问题的强有力的工具，也是求解各类最值问题和不等式证明问题的有效依据和方法。

例 3：（江苏扬州 2022 期末）已知 $x > 0, y > 0,$ 且满足 $x + y = 1$，求 $\frac{x+2y+3}{xy}$ 的最小值。

解：$\frac{x+2y+3}{xy} = \frac{x+2y+3x+3y}{xy} = \frac{4x+5y}{xy} = \frac{4}{y} + \frac{5}{x} = \left(\frac{4}{y} + \frac{5}{x}\right)(x+y)$

$= 4 + 5 + \frac{4x}{y} + \frac{5y}{x} \ge 9 + 2\sqrt{\frac{4x}{y} \bullet \frac{5y}{x}} = 9 + 4\sqrt{5}$，

当且仅当 $\frac{4x}{y} = \frac{5y}{x}$ 取等号

即 $x = 5 - 2\sqrt{5}, y = 2\sqrt{5} - 4$ 取等号，

故 $\frac{x+2y+3}{xy}$ 的最小值为 $9 + 4\sqrt{5}$。

评注：本题为利用基本不等式求解最值问题，关键就是利用已知条件构造代数式将 $\frac{x+2y+3}{xy}$ 转化为 $a + b \ge 2\sqrt{ab}$ 的形式，通过大胆尝试，小心求证，我们将分式中的分子转化 $x+2y+3x+3y$ 进而消去 3 得到 $\frac{4}{y} + \frac{5}{x}$，再将此代数式与 $x + y$ 相乘，构造基本不等式从而简化问题得出最小值。

例 4： 求函数 $f\left(x\right)=\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+3}$ 的最大值。

解：令 $a=\sqrt{1-x}$ ， $b=\sqrt{2x+3}$ ，由题意知 $a\ge 0$ ， $b\ge 0$ ，

由柯西不等式得：

$\left(a+b\right)^2=(\sqrt{2}a\bullet\frac{\sqrt{2}}{2}+b\bullet 1)^2\le(2a^2+b^2)(\frac{1}{2}+1)=\frac{15}{2}$，

则 $a+b\le\frac{\sqrt{30}}{2}$ ，当且仅当 $b=2a,2a^2+b^2=5$ ，

即 $a=\frac{\sqrt{30}}{6},b=\frac{\sqrt{30}}{3}$ 等号成立，也即 $x=\frac{1}{6}$ ，

则 $f\left(x\right)=\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+3}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{30}}{2}$ 。

评注：本题求最值问题利用函数换元思想，将 $a=\sqrt{1-x}$ ， $b=\sqrt{2x+3}$ ，问题转化为已知 $2a^2+b^2=5$ ，求 $a+b$ 的最大值，此问题与柯西不等式具有相似的结构特征，由此可联想到柯西不等式来求解。

2.4 构造数列

根据题目要求构建新的数列来求解问题的一种方法叫做构造数列法。在继高中学习基本初等函数后，数列的学习以等差数列和等比数列为主。数列是一种特殊的函数，其包含了很多的性质，它既是数学知识中的一个重点，也是一个难点，高考的必考内容。从已知条件出发，通过构造数列可以解决求值问题、三角函数、证明不等式等问题。在此过程中，综合应用数列概念、性质、等差中项、等比中项以及数列相加减等知识，对一些较为困难的数学问题进行了合理的解决。本小节以高中知识为载体，通过构造等差、等比数列去解一些代数问题，生动形象地展现数学之美。

例 5： 若 $c>0$ ，a,b 为非零实数且满足 $4a^2-2ab+4b^2-c=0$ ，当 $\left|2a+b\right|$ 取最大值时，求 $\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}$ 的最小值。

解：令 $2a+b=t$ ，将 $2a$ ， $\frac{t}{2}$ ， b 当作等差数列中连续的三项，设其公差为 d ，根据等差数列的性质，有 $2a=\frac{t}{2}-d$ ， $b=\frac{t}{2}+d$ ，将其带入 $4a^2-2ab+4b^2-c=0$ 中，得 $6d^2+3td+t^2-c=0$ ，根据题意易知一元二次方程有实数解，则 $\Delta=\left(3t\right)^2-4\times 6\left(t^2-c\right)\ge 0$ ，解得 $\left|t\right|\le\sqrt{\frac{8c}{5}}$ ，因而 $\left|2a+b\right|_{\max}=2a+b=\sqrt{\frac{8c}{5}}$ ，将上式平方得 $4a^2+4ab+b^2=\frac{8c}{5}$ ，再将其带入 $4a^2-2ab+4b^2-c=0$ 中，得 $a=\frac{3b}{2}$ ， $c=10b^2$ ，则 $\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}$

$=\frac{1}{2b^2}-\frac{2}{b}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{b}-2\right)^2-2\ge -2$，当且仅当$\left(\frac{1}{b}-2\right)^2=0$，即$b=\frac{1}{2}$时取等号，此时$a=\frac{3}{4}$，$c=\frac{5}{2}$，因此，$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}$最小值为$-2$。

评注：这是三元函数求最值问题，若采用常规方法求解，过程较为繁琐，难度较大。通过观察，可抓住题目中的条件$2a+b$，令$2a+b=t$，利用等差中项构造等差数列，并用b来表示a和c，将问题转化为求二次函数的最值问题从而简化问题进行求解。

例 6： 设$a_0=1$，$a_n=\frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}}(n\in N^*)$，试证：$a_n>\frac{\pi}{2^{n+2}}$。

证明：本题所给条件$a_n=\frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}}$（$n\in N^*$）及所证不等式中含有$\pi$这两个特征。因为$a_n>0$，不妨考虑构造数列$a_n=\tan\alpha_n$，其中$\alpha_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，将其带入$a_n=\frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}}\left(n\in N^*\right)$，化简可得$\tan\alpha_n=\tan\frac{\alpha_n-1}{2}$，则$\alpha_n=\frac{\alpha_n-1}{2}$，又$a_0=1$，$a_1=\sqrt{2}-1=\tan\frac{\pi}{8}$，所以$\alpha_1=\frac{\pi}{8}$，则$\alpha_n$是首项为$\frac{\pi}{8}$，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，所以$\alpha_n=\frac{\pi}{8}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{\pi}{2^{n+2}}$，因为当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，有$\tan x>x$，所以$a_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}>\frac{\pi}{2^{n+2}}$。

2.5 构造三角函数模型求代数式的值

正弦定理和余弦定理是揭示三角形边角关系的重要定理，它也是求解代数问题的好帮手。利用正弦、余弦定理“双剑合璧”可以解决许多代数问题。在近几年高考数学中，此部分重点考察其工具性和应用性。当代数或者方程具有与正余弦定理公式相似的结构特征时，利用正余弦定理，建立三角形模型进行求解。这种方法简捷明快、思路巧妙、颇具新意。下面举例说明。

例 7： （2021 年中科大创新实验班初试题）已知$x^2+y^2=x^2+z^2+\sqrt{3}xz=y^2+z^2+yz=16$，求$2xy+xz+\sqrt{3}yz$。

解：由已知条件可联想到余弦定理，由$16=4^2$，可构造一个边长为 4 的等边三角形ΔABC，

设P为ΔABC内一个定点，连接PA，PB，PC，不妨设$PA=x$，$PB=y$，$PC=z$，

在ΔPAB中，因为$x^2+y^2=4^2$，可得$\angle APB=90^\circ$，

在ΔPAC中，因为$x^2+z^2+\sqrt{3}xz=4^2$，可得$x^2+z^2-4^2=-\sqrt{3}xz$，也即$\frac{x^2+z^2-4^2}{2xz}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由余弦定理知$\cos\angle APC=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$\angle APC=150^\circ$。

在ΔPBC中，由$y^2+z^2+yz=4^2$，可得$y^2+z^2-4^2=-yz$，也即$\frac{z^2+y^2-4^2}{2yz}=-\frac{1}{2}$，

同理可得$\cos\angle BPC=120^{\circ}$，

由$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times 4\times 4\sin 60^{\circ}=4\sqrt{3}$，

又$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PAC}+S_{\Delta PBC}$，

则$\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}xz\sin 150^{\circ}+\frac{1}{2}yz\sin 120^{\circ}=4\sqrt{3}$，

即$\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}xz+\frac{\sqrt{3}}{4}yz=4\sqrt{3}$，

则有$2xy+xz+\sqrt{3}yz=16\sqrt{3}$。

评注：本题利用已知条件三个连等式，利用条件中$16=4^2$巧妙构造等边三角形，其中运用到了勾股定理，余弦定理和三角形面积公式等知识一步步求出代数式的值，十分巧妙。

例 8：（2022 年全国中学生数学奥林匹克竞赛广西赛区预赛题）x,y,z都是正数，且$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)>0$，试证：$x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-(x^3+y^3+z^3)\le 9xyz$。

证明：设ΔABC的三边x,y,z的对应角分别为A,B,C则：

$$\cos A+\cos B+\cos C+\cos\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\times\cos\frac{C-\frac{\pi}{3}}{2}$$

$$\le 2\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$$

$$=4\cos\frac{1}{4}\left(A+B+C+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{1}{4}\left(A+B-C-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\le 4\cos\frac{1}{4}\left(A+B+C+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=4\cos\frac{\pi+\frac{\pi}{3}}{4}=4\cos\frac{\pi}{3},$$

则$\cos A+\cos B+\cos C\le 3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$，

当且仅当$A=B=C=\frac{\pi}{3}$，等号成立。

根据余弦定理可知$\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\le\frac{3}{2}$，

整理就可得到$x\left(y+z\right)^2+y\left(z+x\right)^2+z\left(x+y\right)^2-\left(x^3+y^3+z^3\right)\le 9xyz$。

评注：本题构造三角函数模型来解不等式，整个过程先利用三角恒等变换并“放缩”得到$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$，再利用余弦定理最终得到不等式，整个过程充分体现了“构造”的魅力。本题计算过程有些复杂，需有较厚的数学功底，计算时要认真仔细。

2.6 构造几何图形

代数和几何是数学中有机不可分割的部分，他们的结合为我们展现了一种新的力量，在求解代数问题中的“数形结合”，“以形助数”可谓是一道美丽的风景线。有些代数题常以创新的崭新形式出现，初见此类问题，我们常感到没有思路，无从下手，较难洞悉问题的本质[5]。此时如能仔细分析已知条件和求解的式子的特征，构建几何模型的方法，便能够化繁为简，实现问题的解答。而运用几何图形的关键是唤醒学生对代数式几何意义的主观感知，这就要求学生能够全面、综合、多方位地掌握数学的基本概念，能够根据代数式结构特点，用直观的方式构造出一种能够把代数和几何两个部分联系在一起的几何图形，下面举例说明。

例 9： 求函数$y=\left|x+2-\sqrt{1-x^2}\right|$的值域。

解：原函数可变为$\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{\left|1\cdot x+\left(-1\right)\cdot\sqrt{1-x^2}+2\right|}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}}$，这样$\frac{y}{\sqrt{2}}$可视为动点$P\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$到直线$x-y+2=0$的距离$P$点的轨迹为半圆$x^2+y^2=1\left(0\le y\le 1\right)$，如图 1 所示：

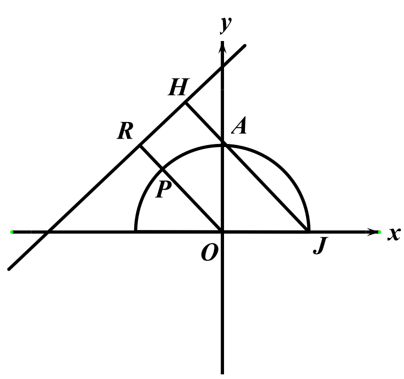

图 1 P点的轨迹

过原点O作直线$x-y+2=0$的垂线，分别交半圆、直线于P、R两点，易求的点$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。

观察函数图象，函数$\frac{y}{\sqrt{2}}$在区间$x\in\left[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$上单调递减，

函数$\frac{y}{\sqrt{2}}$在区间$x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$上单调递增，

因为$PR=OR-OP=\sqrt{2}-1$，$\left|AH\right|=\dfrac{\left|1-0+2\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

则函数$\dfrac{y}{\sqrt{2}}$的值域为$\left[\sqrt{2}-1,\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right]$，

则函数y的值域为$\left[2-\sqrt{2},3\right]$。

评注：本题以形助数，将函数的分子的常数项移到右边得到$y=\left|x-\sqrt{1-x^2}+2\right|$，仔细观察函数特点，此函数与点到之间距离公式$d=\dfrac{\left|ax+by+c\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$相似，在这里等式左右两边同除以$\sqrt{2}$得$\dfrac{y}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\bullet x+\left(-1\right)\sqrt{1-x^2}+2}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}}$，这样$\dfrac{y}{\sqrt{2}}$就可以看做是一动点$P\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$到直线$x-y+2=0$的距离，这样我们就将求函数值域问题转化为点到直线距离问题，进而简化问题进行求解。

例 10：（2020 年浙江预赛模拟）已知x，y，z为正实数，且满足方程组$\begin{cases}x^2+y^2+xy=1\\y^2+z^2+yz=4\\x^2+z^2+xz=3\end{cases}$，求$x+y+z$。

解：将方程组化为$\begin{cases}x^2+y^2-2xy\cos120^\circ=1^2,\\y^2+z^2-2yz\cos120^\circ=2^2,\\x^2+z^2-2xz\cos120^\circ=\left(\sqrt{3}\right)^2,\end{cases}$

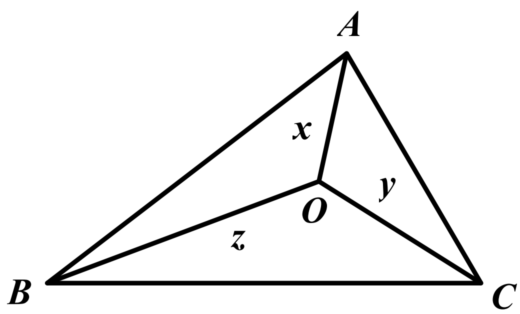

图 2 直角三角形

如图 2 所示，构造直角三角形ABC，设$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，$BC=2$，

点O为三角形内的一点，令$OA=x$，$OC=y$，$OB=z$，

在ΔABO、ΔACO和ΔBCO中，根据余弦定理可知，$\begin{cases}OA^2+OC^2-2OA\bullet OC\cos120^\circ=1^2\\OC^2+OB^2-2OC\bullet OB\cos120^\circ=2^2\\OA^2+OB^2-2OA\bullet OB\cos120^\circ=\left(\sqrt{3}\right)^2\end{cases}$，

则 $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 120^\circ$，

因为 $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OAC}$，

那么我们就可以得到 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}xy + \frac{\sqrt{3}}{4}yz + \frac{\sqrt{3}}{4}zx$，即 $xy + yz + zx = 2$，

此时观察题干三个方程，将其相加得 $2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + xy + yz + xz = 8$，则 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$，

所以 $x + y + z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(xy + yz + zx\right)} = \sqrt{3 + 2\times 2} = \sqrt{7}$。

评注：题干方程组为三元二次方程组不易求出各个未知数的值，但发现 x, y, z 均以二次形式出现，我们较为容易联想到余弦定理，由此可以联想到构造三角形。根据已知条件构建三角形利用面积公式 $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$ 建立等量关系进而求解。

3 小结

在新课改的背景下，新课程标准要求教学活动要注重培养学生的问题意识和解题能力。构造法的妙用，是解决复杂代数问题的有效方法，在此过程中，学生的解题能力、观察能力、联想能力和得到有效的培养，创新思维也获得了针对性的训练。运用构造法，可以使问题化繁为简，从而快速准确地证明结论。但是，构造法的不确定性造就了其灵活多变的特点，即使学生熟练掌握了构造法的内涵，在求解一些代数难题中仍会有些困难。这需要学生在平时勤加练习，构造时胆大心细，观察题目条件和待证问题之间的关系，尝试构造新的数学对象和数学关系来寻找桥梁，找到问题的切入点进而求解。

参考文献

[1] 刘明花.运用构造法解决高中数学试题[J].数理化解题研究,2023(21):5-7.
[2] 陈翔.构造三角形模型求解代数题[J].高中数学教与学,2022(19):29-30.
[3] 何卫华.例说构造几何图形解代数题[J].上海中学数学,2013(12):46-47.
[4] 朱建新.例谈借助不等式求最值的策略[J].数学大世界(中旬),2019(08):9+8.
[5] 宋亚洲.构造几何模型巧解竞赛难题[J].中学生数学,2021(17):33-34.