托勒密定理及不等式在最值问题中的应用与推广

王 洁

扬州大学 江苏扬州

【摘要】托勒密定理及托勒密不等式是平面几何中的重要定理及推论。运用托勒密定理及托勒密不等式不仅对解决平面圆内接四边形问题具有重要作用，还给出解决代数中某类最值问题的通用解法，这一解法拓展了代数问题几何化的解题思路，提供了快速解题的捷径。本文通过分析托勒密定理在一元双根式函数最大值问题中的解题思路，并举例说明托勒密不等式在平面几何一类最值问题中的解法，总结归纳出了代数中一元双根式函数最大值问题和平面几何中平面四边形某类最值问题的一般性结论。在代数与平面几何此类最值问题上，给中高考考生或参加数学竞赛等学有余力者创造出新的速解方法。

【关键词】托勒密定理；托勒密不等式；平面和几何；最值问题；应用与推广

【收稿日期】2023 年 11 月 8 日 【出刊日期】2023 年 12 月 15 日 【DOI】10.12208/j.aam.20231025

The application and promotion of ptolemy's theorem and inequalities in maximum-minimum value problems

Jie Wang

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】Ptolemy 's theorem and Ptolemy 's inequality are important theorems and corollaries in plane geometry. The use of Ptolemy 's theorem and Ptolemy 's inequality not only plays an important role in solving the problem of plane circle inscribed quadrilateral, but also gives a general solution to a certain kind of maximum-minimum value problems in algebra. This solution expands the problem-solving idea of geometricization of algebraic problems and provides a shortcut for fast problem-solving. In this paper, by analyzing the solution of Ptolemy 's theorem in the maximum value problems of one-variable double-root function, and giving examples to illustrate the solution of Ptolemy 's inequality in the maximum-minimum value problem of plane geometry, the general conclusions of some kinds of maximum value problems of one-variable double-root function in algebra and the maximum-minimum value problems of plane quadrilateral in plane geometry are summarized. On the maximum-minimum value problems such as algebra and plane geometry, a new fast solution method is created for the candidates of high school entrance examination or those who have the ability to participate in mathematics competitions.

【Keywords】Ptolemy 's theorem; Ptolemaic inequality; Plane and geometry; The Maximum-minimum value problem; Application and promotion

托勒密（Ptolemy）是公元二世纪古希腊天文学家、地理学家、数学家，托勒密定理是由其名字命名的。巧用托勒密定理及不等式能快速解决一些平面几何乃至代数问题，拓宽解题范围，简化解题步骤，因此托勒密定理及不等式解法在中学数学竞赛和高考模考试题中有显著地位。

1 托勒密定理与托勒密不等式

托勒密定理：圆的内接凸四边形两组对边长度乘积的和等于两条对角线长的乘积，即在如图 1 的圆内接四边形 $ABCD$ 中，$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$。可推出勾股定理、正弦和、余弦差公式及一系列的不等式[1]。

托勒密不等式：在任意四边形中，四边形的两组对边长度乘积的和不小于两条对角线长的乘积，当且仅当四边形为圆内接凸四边形时等号成立，即在图 2 所示的任意四边形 $ABCD$ 中，$AB \bullet CD + BC \bullet AD \ge AC \bullet BD$。

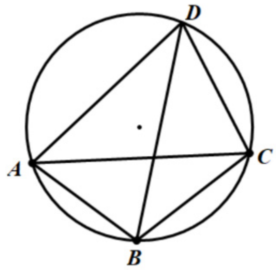

图 1

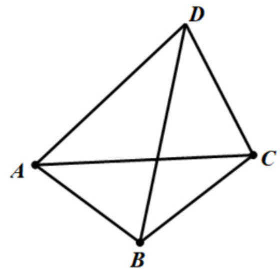

图 2

2 托勒密定理在一元双根式函数最大值类问题中的应用与推广

例 1 求函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 的最大值。

解：如图 3，构造直径 $AC=2$ 的圆内接四边形 $ABCD$，令 $AB=\sqrt{1-x}$，$BC=\sqrt{x+3}$，$AD=\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{2}$ 由 $AB \bullet CD + BC \bullet AD = AC \bullet BD$ 得，$\sqrt{2}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}\right)=2BD$。因为 BD 为圆上的弦，所以长度一定不大于直径 AC，即 $BD \le 2$，则有 $\sqrt{2}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}\right)=2BD \le 2 \bullet 2 = 4$，故 $\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3} \le 2\sqrt{2}$。

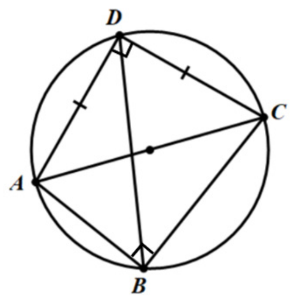

图 3

分析：考虑到 $\left(\sqrt{1-x}\right)^2+\left(\sqrt{x+3}\right)^2=4$，可构造一个圆内接四边形，使直径同侧的两条直角边为 $\sqrt{1-x}$、$\sqrt{x+3}$，而直径另一侧的两条直角边只需要相等即可。

例 2 求函数 $f(x)=\sqrt{2x+4}+\sqrt{1-x}$ 的最大值。

解：如图 4，构造直径 $AC=\sqrt{3}$ 的圆内接四边形 $ABCD$，令 $AB=\sqrt{x+2}$，$BC=\sqrt{1-x}$，$AD=\sqrt{2}$，$CD=1$。由 $AB \bullet CD + BC \bullet AD = AC \bullet BD$ 得，$\sqrt{2} \bullet \sqrt{x+2}+\sqrt{1-x}=\sqrt{3}BD$。因为 BD 为圆上的弦，所以长度一定不大于直径 AC，即 $BD \le \sqrt{3}$，则有 $\sqrt{2x+4}+\sqrt{1-x}=\sqrt{3}BD \le \sqrt{3} \bullet \sqrt{3}=3$，故 $\sqrt{2x+4}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 3。

分析：因 $(\sqrt{2x+4})^2+(\sqrt{1-x})^2 \ne c$（$c$ 为常数），故可提取 $\sqrt{2}$，构造如图 4 以 $\sqrt{1-x}$、$\sqrt{x+2}$ 为直角边，

对角线为直径的圆内接四边形，令圆内接四边形 $ABCD$ 内 $\sqrt{x+2}$ 所对边的边长含 $\sqrt{2}$ 这个因数，AD、CD 两边长有公共因数，且满足 $AD^2+CD^2=AC^2$，即可找出四边最合适的边长，从而用托勒密定理快速求解。

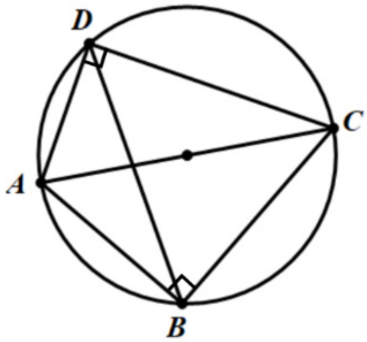

图 4

解题推广：

当 $a>0$，$c>0$，$bc+ad>0$ 时，$y=\sqrt{ax+b}+\sqrt{d-cx}$ 的最大值为 $\sqrt{(a+c)\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)}$ 或 $\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)(ac+bd)}$。

证明：构造直径 $AC=\sqrt{\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)}$ 的圆内接四边形 $ABCD$。令 $AB=\sqrt{x+\frac{b}{a}}$，$BC=\sqrt{\frac{d}{c}-x}$，$AD=\sqrt{c}\bullet\sqrt{\frac{bc+ad}{ac(a+c)}}$，$CD=\sqrt{a}\bullet\sqrt{\frac{bc+ad}{ac(a+c)}}$。由托勒密定理得 $AB\bullet CD+BC\bullet AD=\sqrt{x+\frac{b}{a}}\left(\sqrt{a}\bullet\sqrt{\frac{bc+ad}{ac(a+c)}}\right)+\sqrt{\frac{d}{c}-x}\left(\sqrt{c}\bullet\sqrt{\frac{bc+ad}{ac(a+c)}}\right)$ $=\sqrt{ax+b}\bullet\sqrt{\frac{bc+ad}{ac(a+c)}}+\sqrt{d-cx}\bullet\sqrt{\frac{bc+ad}{ac(a+c)}}=\sqrt{\frac{bc+ad}{ac(a+c)}}\left(\sqrt{ax+b}+\sqrt{d-cx}\right)$ $=AC\bullet BD=\sqrt{\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)}\bullet BD$。因为 BD 为圆上的弦，所以长度一定不大于直径 AC，即 $BD\le\sqrt{\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)}$，则 $\sqrt{\frac{bc+ad}{ac(a+c)}}\left(\sqrt{ax+b}+\sqrt{d-cx}\right)=\sqrt{\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)}\bullet BD$ $\le\sqrt{\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)}\bullet\sqrt{\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)}=\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)$，故 $\sqrt{ax+b}+\sqrt{d-cx}\le\sqrt{\frac{(a+c)(bc+ad)}{ac}}$ $=\sqrt{(a+c)\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)}=\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)(ac+bd)}$，则 $\sqrt{ax+b}+\sqrt{d-cx}$ 最大值为 $\sqrt{(a+c)\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)}$ 或 $\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)(ac+bd)}$。

分析：提取两根式的系数，使根号下 x 的系数之和为 0，不妨使系数分别为 1、−1，即 $y=\sqrt{a}\bullet\sqrt{x+\frac{b}{a}}+\sqrt{c}\bullet\sqrt{\frac{d}{c}-x}$。构造以 $\sqrt{x+\frac{b}{a}}$、$\sqrt{\frac{d}{c}-x}$ 为直角边、斜边为直径且为对角线的圆内接四边形，两条直角边的相应对边分别含 $\sqrt{a}$、$\sqrt{c}$，故求得 AD、CD，进而由托勒密定理得出最大值。

3 托勒密不等式在平面四边形一类最值问题中的应用与推广

例 1 在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AC=\sqrt{5}$，$BD\perp BC$，$BD=2BC$，求 AD 最小值。

解：如图 5，令 $BC=t$，则 $BD=2t$，$CD=\sqrt{5}t$。依据托勒密不等式 $AB \bullet CD+BC \bullet AD \geq AC \bullet BD$，有 $t \bullet AD+\sqrt{5} \bullet t \geq 2\sqrt{5} \bullet t$，则 $AD \geq \sqrt{5}$，当且仅当 A，B，C，D 四点共圆时取等号，此时 AD 有最小值 $\sqrt{5}$。

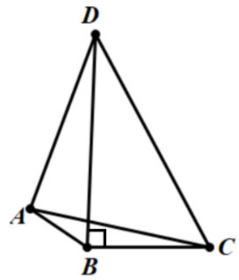

图 5

例 2 在平面凸四边形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=\sqrt{3}$，$AC\perp CD$，$AC=CD$，求 BD 的最大值。

解：如图 6，令 $AC=t$，则 $CD=t$，$AD=\sqrt{2}t$，依据托勒密不等式 $AB \bullet CD+BC \bullet AD \geq AC \bullet BD$，有 $t \bullet 1+\sqrt{3} \bullet \sqrt{2}t \geq t \bullet BD$，则 $BD \leq \sqrt{6}+1$，当且仅当 A，B，C，D 四点共圆时取等号，此时 BD 有最大值 $\sqrt{6}+1$。

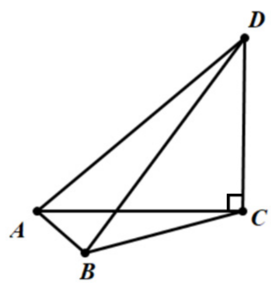

图 6

分析：以上两题本可采用正余弦定理、平面直角坐标系法、向量法等常规解法，但此类解法步骤多、易出错，若渗透学习托勒密定理及不等式则可快速解决此类最值问题，开拓解法。

解题推广：

若已知两边，而四边形内不涉及已知两边的三角形三边有比例关系，那么剩余未知一边有最大值或最小值。若未知一边为四边形外边，则有最小值；若未知一边为四边形对角线，则有最大值。

转化为数学语言，即为以下两个结论：

（1）在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=\mathrm{a}$，$AC=\mathrm{b}$，$BC:CD:BD=c:d:e$，则 AD 最小值为 $\frac{be-ad}{c}$。

证明：令 $BC=ct$，$CD=dt$，$BD=et$，依据托勒密不等式有 $a \bullet dt+AD \bullet ct \geq b \bullet et$，则有 $AD \geq \frac{be-ad}{c}$，当且仅当 A，B，C，D 四点共圆时取等号。

（2）在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=\mathrm{a}$，$BC=b$，$AC:CD:AD=c:d:e$，则 BD 最大值为 $\dfrac{be+ad}{c}$。

证明：令 $AC=ct$，$CD=dt$，$AD=et$，依据托勒密不等式有 $a\bullet dt+b\bullet et\geq ct\bullet BD$，则有 $BD\leq\dfrac{be+ad}{c}$，当且仅当 A，B，C，D 四点共圆时取等号。

4 小结

托勒密定理及其不等式来源于平面几何，为平面几何问题尤其一类最值问题提供准确、快捷的解法。此外，托勒密定理还可快速解决一类代数问题——一元双根式函数最大值问题，并用其一般化结论进行速解，拓宽中学生解题的思路与方法，为中学数学竞赛题提供简化解法，基于此，中学教师在教学实践中应渗透托勒密定理及不等式的学习，从数学史角度给出定理并证明，以拓展解题思路。

参考文献

[1] 丁奕涵,张美玲,唐玉华.四点共圆之托勒密定理[J].中学生数学,2022(12):35－36.

[2] 陈武.掌握托勒密定理简证一类几何题[J].中小学数学(初中版),2020(12):29-30.

[3] 闫伟.一道填空压轴题的解法探究及拓展应用[J].数学通讯,2020(09):8-10.

[4] 丁庆彬.对一道托勒密定理模型试题的探究[J].中学数学教学参考,2021(20):26-28.

[5] 刘钢.合纵连横　整体把握——托勒密定理一席谈[J].高中数学教与学,2023(06):11-13.