

中考函数几何综合题的“多题一解”探析

陈芷晗

扬州大学 江苏扬州

【摘要】中考函数与几何综合题是区分学生数形转化与迁移能力的关键题型。本文从“多题一解”视角，选取 2024 年苏州中考线段关系题、苏州中考面积最值题及湖北中考角相等题三类典型真题，系统剖析其解法共性。研究发现，三类题目虽设问不同——分别涉及线段位置判定、动态面积最大化及角度等量关系——但均可归结为“坐标表示→关系转化→方程（函数）求解→结果检验”的统一解题路径。其中，线段关系借助对称轴用坐标差表示长度；面积问题通过参数化动点坐标建立二次函数求最值；角度问题则通过作垂线构造直角三角形，将正切值相等转化为比例方程。该路径强调从图形条件到代数表达的可迁移转化策略。教学上，应引导学生在不同题型中识别共同结构，逐步实现从孤立解题到类题通解的能力跃升，为中考专题复习提供结构化思路。

【关键词】函数与几何；综合题；多题一解；数形结合；关系转化

【收稿日期】2026 年 7 月 4 日

【出刊日期】2026 年 8 月 1 日

【DOI】10.12208/j.aam.20260014

A unified approach to function–geometry problems in the senior high school entrance examination

Zhihan Chen

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 Function–geometry problems in the senior high school entrance examination are important for testing students’ ability to connect geometric figures with algebraic expressions and apply problem-solving methods to similar problems. This paper discusses three typical problems from the 2024 entrance examinations: a line-segment relation problem and an area maximum problem from Suzhou, and an equal-angle problem from Hubei. Although the three problems ask different questions, their solutions follow a similar four-step process: coordinate representation, relation transformation, equation or function solving, and result checking. In the line-segment problem, the axis of symmetry is used to express segment lengths by coordinate differences. In the area problem, the coordinates of a moving point are expressed with a parameter, and a quadratic function is then used to find the maximum area. In the angle problem, perpendicular lines are added to form right triangles, and equal tangent values are used to transform the angle relation into a proportional equation. These three methods show a common way of turning geometric conditions into algebraic relations. In teaching, students should be guided to identify the common structure behind different types of problems, so that they can gradually move from solving a single problem to mastering a general method for a class of problems. This can provide a clearer and more systematic approach to topic-based review for the senior high school entrance examination.

【Keywords】 Functions and geometry; Integrated problems; One approach for multiple problems; Integration of numerical and graphical representations; Relationship transformation

1 引言

中考数学中，函数与几何综合题是考查学生综合运用能力的重要题型，往往具有较强的综合性和区分度。此类题目常以二次函数、反比例函数或一次函数的图象为背景，将点的坐标、动点变化、线段关系、面积关系和角度关系等内容联系起来。既考查学生的代数运算能力，也考查其几何直观与逻辑推理能力。其

中,二次函数与几何综合问题较为典型,相关研究认为,解决此类问题常需综合运用数形结合、分类讨论和方程思想等方法^[1]。由于题目信息量较大、图形关系较复杂,学生在解题时往往难以从众多条件中提取有效信息,容易出现“单个知识点都懂,综合题却无从下手”的困境。

进一步观察这类题目可以发现,虽然题目背景和设问方式不断变化,但其解题过程并非完全无章可循。多数题目都需要借助函数图象,将图形中的位置关系、数量关系转化为可以列式求解的代数关系,这与数形结合思想和转化思想的基本要求是一致的,即通过图形直观发现数量关系,再借助符号运算完成问题求解^[2,3]。若能从同类题目中提炼出相对稳定的解题思路,并引导学生在新情境中迁移运用,便有助于突破函数与几何综合题的教学难点^[4]。

2 从数形转化看解题通法

本文从“多题一解”的视角出发,选取中考函数与几何综合题中的典型题型进行比较,分析其解法上的共同点,并结合真题说明具体的解题过程,为课堂教学和专题复习提供参考。

函数与几何综合题的难点,不只在于识别函数类型,更在于如何利用函数图象表示和处理几何关系。题目中的动点、线段、面积和角度等条件虽然形式不同,但最终都要落实到相应的数量关系。学生若只关注某个局部条件,容易陷入零散计算;若能先从整体上把握图形关系,再将其转化为可列式、可求解的数量关系,解题思路就会清楚许多。

从解题过程上看,这类问题通常要经历“坐标表示—关系转化—方程求解—结果检验”几个环节。首先,借助坐标表示点的位置和线段长度,使图形关系可以用数量表达;其次,把题目中的线段、面积、角度等几何条件转化为代数关系;在此基础上,再通过方程或函数关系完成求解。最后,将所得结果放回原图形中,检验点的位置、参数范围是否符合题意。这一过程概括了函数与几何综合题中较为常见的解题思路,也为后续分析同类问题提供了基本思路。

当然,该路径并非固定套用的步骤。不同题目给出的条件不同,转化方式也会有所差异。有的题目需要利用坐标差表示线段关系,有的需要建立函数求面积最值,有的则需要借助比例关系转化。下文将结合三道典型例题,具体说明这些转化方法在不同问题中的运用,求解路径如图 1 所示。

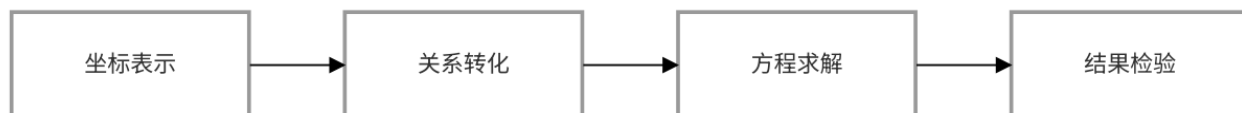


图 1 函数与几何综合题的结构化求解路径

3 “多题一解”思想在典型模型中的应用

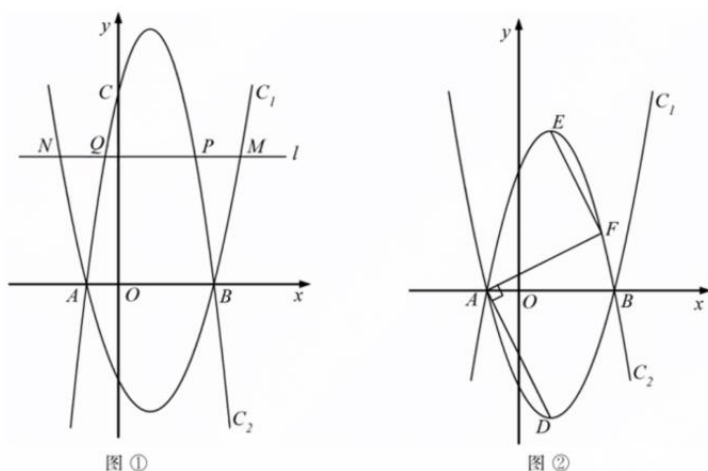
为说明上述解题思路在具体题目中的运用,本文选取线段位置关系、面积最值和角相等三类典型问题进行分析。三类问题的设问不同,所采用的转化方法也各有侧重,但都需要把图形条件转化为可运算的代数关系。下面结合具体例题,分别说明坐标化处理、函数化处理和比例关系转化的运用。

3.1 坐标化模型：从位置关系到坐标差

[例 1] (2024 年苏州市中考第 27 题)

如图 2,二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象 C_1 与开口向下的二次函数图象 C_2 均过点 $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ 。

(2) 若图象 C_2 过点 $C(0,6)$, 点 P 位于第一象限,且在图象 C_2 上,直线 l 过点 P 且与 x 轴平行,与图象 C_2 的另一个交点为 Q (Q 在 P 左侧),直线 l 与图象 C_1 的交点为 M, N (N 在 M 左侧)。当 $PQ = MP + QN$ 时,求点 P 的坐标。



(第 27 题图)

图 2 2024 年苏州市中考第 27 题图

分析：本题涉及两条抛物线以及同一水平直线上的四个交点。若分别求出 P, Q, M, N 的坐标，计算较为繁琐。由于两条抛物线均经过 $A(-1,0)$ 和 $B(3,0)$ ，它们的对称轴相同，均为 $x=1$ 。因此，可以对称轴为参照，用各点到对称轴的水平距离表示 PQ, MP, QN 的长度，先将题目中的线段关系转化为参数关系，再利用 P, M 纵坐标相等建立方程。若逐一求交点坐标，计算过程易变得繁杂。

解：由 $C_1 = x^2 + bx + c$ 且过 $A(-1,0)$ ， $B(3,0)$ ，

可得 $C_1 = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ 。

又由 C_2 过 $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ 、 $C(0,6)$ ，

可得 $C_2 = -2x^2 + 4x + 6 = -2(x-1)^2 + 8$ ，

则两条抛物线的对称轴均为 $x=1$ 。

设点 P 到对称轴 $x=1$ 的水平距离为 t ，则由 C_2 的对称性可知 $PQ = 2t$ ，

再设水平直线 l 与 C_1 右侧交点 M 到对称轴的水平距离为 s ，

则由 C_1 的对称性可得： $MP = QN = s - t$ ，

由题设 $PQ = MP + QN$ ，得 $2t = 2(s - t)$ ，

即 $s = 2t$ 。

由于 P 与 M 在同一条水平直线上，二者纵坐标相等。

代入得 $8 - 2t^2 = (2t)^2 - 4$ ，得 $t^2 = 2$ ，

又点 P 位于第一象限，故 $t = \sqrt{2}$ ，

则 $P(1 + \sqrt{2}, 4)$ 。

方法提炼：本题的关键是利用公共对称轴表示同一水平直线上各点的位置。设点到对称轴的水平距离后，线段 PQ 、 MP 、 QN 都可以直接用参数表示，从而把线段之间的等量关系转化为参数方程。所以对于同一水平直线上存在多个函数图象交点的问题，可先寻找公共对称轴或其他稳定的参照对象，再用横坐标差表示线段长度，以减少不必要的坐标计算。

3.2 函数化模型：从几何面积到函数最值

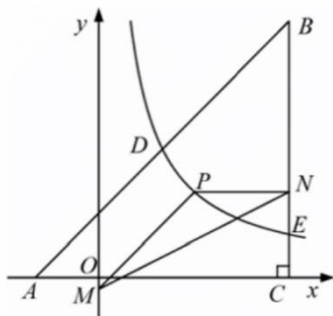
[例 2] (2024 年苏州市中考第 24 题)

如图 3， $\triangle ABC$ 中， $AC = BC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $A(-2,0)$ ， $C(6,0)$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0, x > 0$) 的图象

与 AB 交于点 $D(m,4)$ ，与 BC 交于点 E 。

(1) 求 m, k 的值；

(2) 点 P 为反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0, x > 0$) 图象上一动点 (点 P 在 D, E 之间运动, 不与 D, E 重合)。过点 P 作 $PM \parallel AB$, 交 y 轴于点 M ; 过点 P 作 $PN \parallel x$ 轴, 交 BC 于点 N , 连接 MN , 求 $\triangle PMN$ 面积的最大值, 并求出此时点 P 的坐标。



(第 24 题图)

图 3 2024 年苏州市中考第 24 题图

分析: 本题需要求解 $\triangle PMN$ 面积的最大值, 关键是用同一个参数表示其底和高。点 P 在反比例函数图象上, 可设 $P\left(t, \frac{8}{t}\right)$ 。由于 $PN \parallel x$ 轴, 底边 PN 可由横坐标差表示; 又因为 $PM \parallel AB$, 可根据直线 AB 的斜率求出点 M 的坐标, 进而得到点 M 到 PN 的距离。这样, 三角形的底和高都可以用 t 表示, 面积问题便转化为关于 t 的二次函数最值问题。有研究在二次函数综合题教学中也强调, 应通过“分步突破”和“有效转化”帮助学生看清几何条件与函数关系之间的联系^[5]。

解: 由第 (1) 问可得 $m=2, k=8$, 故反比例函数为 $y = \frac{8}{x}$

又因为 BC 所在直线为 $x=6$, 所以反比例函数图象与 BC 的交点为: $E\left(6, \frac{4}{3}\right)$

因点 P 在 D, E 之间运动, 且不与 D, E 重合, 因此可设 $P\left(t, \frac{8}{t}\right)$ ($2 < t < 6$)

由图形关系可知, BC 所在直线为 $x=6$, 且 $PN \parallel x$ 轴, 因此 $PN=6-t$

又因为 $PM \parallel AB$, 且 AB 的斜率为 1, 所以直线 PM 的斜率也为 1。过点 $P\left(t, \frac{8}{t}\right)$ 作斜率为 1 的直线 PM , 可得 $y - \frac{8}{t} = x - t$

令 $x=0$, 得 $M\left(0, \frac{8}{t} - t\right)$

又 $PN \parallel x$ 轴, 其所在直线为 $y = \frac{8}{t}$, 故点 M 到直线 PN 的距离为 $\frac{8}{t} - \left(\frac{8}{t} - t\right) = t$

因此有 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \cdot PN \cdot t = \frac{1}{2}(6-t)t = -\frac{1}{2}(t-3)^2 + \frac{9}{2}$

该二次函数的对称轴为 $t=3$, 且 $3 \in (2, 6)$, 故顶点在点 P 的实际运动范围内,

因此, 当 $t=3$ 时, $\triangle PMN$ 的面积取得最大值 $S_{\max} = \frac{9}{2}$ 此时 $P\left(3, \frac{8}{3}\right)$ 。

方法提炼: 本题先用参数 t 表示动点 P 的坐标, 再借助平行关系分别表示 $\triangle PMN$ 的底和高, 从而建立面积关于 t 的函数。对于动点背景下的面积最值问题, 可以先选择能够表示动点位置的参数, 再把相关线段长

度和点到直线的距离都化为该参数的式子，最后利用所得函数求最值。

3.3 角度转化模型：从角相等到比例方程

[例 3] (2024 年湖北省统一中考数学压轴题)

如图 4，抛物线 $y = -x^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ 和 B ，与 y 轴交于 C 。

(2) M 为抛物线上一点，若 $\angle MAB = \angle ACO$ ，求 M 点的横坐标。

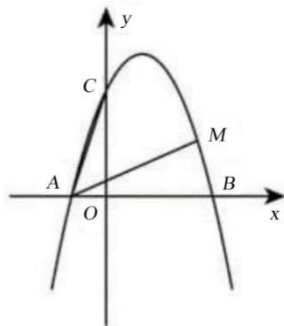


图 4 2024 年湖北省统一中考数学压轴题图

分析：本题给出的是角相等条件，但直接表示两个角的大小并不方便。观察图 4 可知， $\angle ACO$ 位于直角三角形 ACO 中，其正切值可以由两条直角边之比表示。过点 M 作 $MH \perp x$ 轴，可利用点 M 的坐标表示相关线段长度。由于题目未限定点 M 所在的象限，因此需根据点 M 的位置进行分类讨论，再将 $\angle MAB = \angle ACO$ 转化为相应的正切值关系，建立关于点 M 横坐标的方程。

解：由题意及图形可见，本题仅讨论 M 在第一象限的情形（若原题未限定，则需补充分类讨论）。以下按第一象限求解，其他象限情形可类似讨论。

由第 (1) 问可得 $b = 2$ ，故二次函数解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$ ，

于是 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ， $C(0, 3)$

设 $M(m, -m^2 + 2m + 3)$ ，过点 M 作 $MH \perp x$ 轴，垂足为 H 。

由图中所示情形可知，点 M 位于第一象限，故 $0 < m < 3$ ，

此时 $MH = -m^2 + 2m + 3$ ， $AH = m + 1$

在直角三角形 ACO 中， $AO = 1$ ， $CO = 3$ ，

$$\text{故 } \tan \angle ACO = \frac{AO}{CO} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{又在直角三角形 } MAH \text{ 中，} \tan \angle MAB = \frac{MH}{AH} = \frac{-m^2 + 2m + 3}{m + 1}$$

$$\text{由 } \angle MAB = \angle ACO, \text{ 得 } \frac{-m^2 + 2m + 3}{m + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{整理得 } 3m^2 - 5m - 8 = 0, \text{ 解得 } m = \frac{8}{3} \text{ 或 } m = -1$$

其中 $m = -1$ 对应点 A ，不合题意，故舍去。

且 $m = \frac{8}{3}$ ，满足 $0 < m < 3$ ，符合图中点 M 的位置要求。

因此点 M 的横坐标为 $\frac{8}{3}$ 。

方法提炼：本题通过作垂线构造两个直角三角形，将角相等转化为正切值相等，再利用点的坐标表示相关线段，最终得到关于点 M 横坐标的方程。对于坐标系中的角相等问题，可先判断这些角能否置于直角三

角形中，再借助正切值、斜率或相似三角形，把角度条件转化为边长之间的数量关系。

3.4 类题共性：在“异”中识别“同”

综合上述三道典型例题不难发现，三类函数与几何综合题均遵循“坐标表示→关系转化→方程（函数）求解→结果检验”的解题流程，差异主要在于最关键的“关系转化”环节。三类题目设问形式各不相同，分别对应线段位置、面积最值、角度相等三类几何条件，但本质的解题逻辑一致，都需要将抽象的几何条件转化为可列式、可运算的代数数量关系。

为便于比较，现将三类问题的解题结构归纳如下。

表 1 共同结构归纳表

问题类型	几何条件	关键转化	求解方法
线段关系	线段等量	坐标差表示线段长度	建立方程
面积最值	面积变化	用同一参数表示底和高，建立面积函数	求函数最值
角相等	角度相等	转化为边长比或正切值相等	建立方程

由表 1 可见，“多题一解”并不是忽视题目差异，也不是机械套用固定的解题模板，而是在区分差异的基础上寻找可以迁移的解题结构^[6]。这类形异质同的几何综合题，可通过比较分析发现共同结构和解法共性，从而实现“做一题，会一类，通一片”^[7]。本文所探究的线段关系、面积关系和角度关系虽外在表现形式不同，转化方式也各有侧重，但解题时都需要先借助坐标表示图形，再将几何条件转化为可运算的数量关系，最后通过方程或函数完成求解。正是在这些“异”中识别出“同”，学生才能实现从单一题目经验到同类题型迁移的能力提升，这也是“多题一解”思想的教学价值所在。

4 解题策略与教学启示

前文所举三类问题，虽题干背景、设问角度各不相同，但解题过程都离不开一个共同环节，即把图形中的关系转化为可以计算、可以求解的数量关系。由此看，此类题型的课堂教学，不宜只停留在“这道题怎样做”的层面，而应进一步追问“这类题为什么可以这样做”。只有把单题解法背后的结构讲清楚，学生才有可能在新的题目中实现迁移。

在审题时，教师首先要引导学生从图形整体入手，而不是急于代入条件。函数与几何综合题往往把点的位置、线段关系、面积变化、角度关系等内容放在同一图形中，学生若一开始就逐句翻译题干、拆解条件，容易被碎片化信息干扰，割裂图形的整体结构，导致解题思路局限。较有效的做法是先观察图形中是否存在平行、垂直、共线、等角、对称等关系，并由此判断题目可能对应的核心解题模型与转化方向。例如，平行关系常与相似、斜率联系在一起，等角关系常可转化为比例或三角函数关系，面积问题则往往需要寻找底和高的表达方式。这样审题，实际上是在复杂图形中先找到“可转化”的关系。

在设点时，应让坐标表示服务于后续推理。函数图象上的动点如果随意设为两个未知量，后面的计算往往会变得繁杂；若能借助函数解析式设为 $P(t, f(t))$ ，就可以把点的位置统一到一个参数中。这样处理不仅减少了未知数，也为表示线段长度、面积大小或角度关系提供了便利。教学中可通过对比多元设点与单参设点的解题差异，使学生意识到，设点并不是解题中的形式步骤，而是决定后续转化是否顺畅的重要环节。

在列式转化时，关键是看清几何条件最终落到哪一种代数关系上。线段关系可以转化为坐标差，面积关系可以转化为关于变量的函数，角相等可以转化为相似比例、三角函数或斜率关系。函数与几何综合题之所以具有综合性，正在于它要求学生在图形语言和符号语言之间来回转换。教师在讲解时，与其直接给出方程，不如多追问一句：这个方程是由哪个几何条件得到的？这个几何条件为什么能这样表示？这样的追问比单纯完成运算更有助于学生理解解题思路。

此外，解题后的检验与反思也不可忽视。函数与几何综合题中的答案常受到点的位置、参数范围和图形区域的限制，当题目存在多种可能情形时，还需进行分类讨论。求出的坐标或参数只有重新放回原图形中检

验,才能判断是否真正符合题意^[8]。更进一步,解完一题后还应回看本题的切入点、关键转化思路和最终方程,思考它与同类问题之间的联系。若学生能逐渐说清“本题用了什么关系”、“这一关系还能用于哪些题目”,就说明他们已经不只是记住了解法,而是在形成类题迁移的意识。

5 结语

中考函数与几何综合题的设问形式灵活多变、题型素材不断更新,但其求解过程往往存在相通之处。坐标化处理侧重把点的位置和线段关系转化为坐标差,函数化处理侧重把面积变化转化为关于动点参数的函数,比例关系转化则侧重把角度关系转化为比例关系、三角函数关系或斜率关系。三类问题的表层条件不同,转化方式各有侧重,但都离不开“坐标表示—关系转化—方程求解—结果检验”的基本过程。若试题未明确限定象限,则需分类讨论,本文仅展示最典型情形。

由此看,“多题一解”的教学核心并非固化解题模板、机械套用步骤,而在于通过比较不同题目,揭示其背后共同的数形转化路径。对学生而言,掌握坐标化、函数化和比例关系转化三种处理方式,有助于把单题中的局部经验转化为类题中的通用方法;对教师而言,综合题讲解也不应只停留在答案呈现上,而应进一步追问条件如何转化、方程从何而来、方法如何迁移。只有把这些关键环节讲清楚,函数与几何综合题教学才可能从单题求解走向结构化解。

参考文献

- [1] 吕晖生.二次函数与几何综合类题型解题策略[J]. 中学数学,2022(08):78-80.
- [2] 黄华胜.数形结合显身手,数学思维妙提升[J]. 中学数学,2021(15).
- [3] 王丽娜.巧妙转化,化繁为简——转化思想在初中数学解题教学中的应用[J].数学学习与研究,2021(16).
- [4] 金佳元.初中函数型综合问题的困难分析及教学策略[J].上海中学数学,2023(03):18-20.
- [5] 范明明,郑金.分步突破,有效转化,深度教学:对一道二次函数综合题的突破与反思[J].数学通讯, 2021(1):8-11.
- [6] 周立平,唐慧辉,吴雪云.初中数学习题的“变式教学”研究[J].创新教育研究, 2025,13(12):328-334.
- [7] 彭象华.变中明晰 多题同源——谈一次说题案例及思考[J].中国数学教育·上半月(初中版), 2021(10): 60-64.
- [8] 孙晓曼,刘君.浅谈初中生数学分类讨论思想的培养[J].教育进展,2024,14(02):1982-1987.

版权声明: ©2026 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS