

## 任意三角剖分的退化度都是 5 的平面图的构造

张旺凯, 刘文忠

南京航空航天大学数学学院 江苏南京

**【摘要】** Bickle 在研究平面图三角剖分的退化度时, 提出如下问题: 给定整数  $k, l$ , 是否存在退化度为  $k$  的平面图  $G$ , 使得  $G$  的任意三角剖分都有退化度  $l$ , 其中  $0 \leq k \leq 5$ ,  $3 \leq l \leq 5$ . 对于上述问题, 除了  $(k, l) = (2, 5)$  和  $(k, l) = (3, 5)$  两种情形外, Bickle 确定了其它所有情形. 在本文中, 我们肯定地回答  $(3, 5)$  这种情形: 证明存在一个 3-退化平面图  $G$ , 使得  $G$  的每一个三角剖分的退化度都是 5.

**【关键词】** 平面图; 三角剖分; 退化度

**【基金项目】** 国家自然科学基金面上项目 (12271251)

**【收稿日期】** 2026 年 7 月 4 日

**【出刊日期】** 2026 年 8 月 1 日

**【DOI】** 10.12208/j.aam.20260011

### A construction of a graph whose every triangulation has degeneracy 5

Wangkai Zhang, Wenzhong Liu

School of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, Jiangsu

**【Abstract】** When studying the degeneracy of triangulations of plane graphs, Bickle asked whether there exists a plane graph  $G$  of degeneracy  $k$  such that every triangulation of  $G$  has degeneracy  $l$ , where  $0 \leq k \leq 5$  and  $3 \leq l \leq 5$ . Except for the cases  $(k, l) = (2, 5)$  and  $(k, l) = (3, 5)$ , the problem has been completely resolved. In this paper, we answer the case  $(3, 5)$  affirmatively. More precisely, we construct a 3-degenerate plane graph  $G$  and prove that every triangulation of  $G$  contains a 5-core. Consequently, every triangulation of  $G$  has degeneracy 5.

**【Keywords】** Plane graph; Triangulation; Degeneracy

#### 1 引言

本文只考虑有限简单图. 文中未提到的定义和符号参照文献<sup>[6]</sup>. 对图  $G$ , 用  $V(G)$  与  $E(G)$  分别表示其顶点集和边集,  $\delta(G)$  表示最小度. 若  $S \subseteq V(G)$ , 则  $G[S]$  表示由  $S$  诱导的子图. 设  $k$  为非负整数. 若图  $G$  的任意非空子图  $H$  都满足  $\delta(H) \leq k$ , 则称  $G$  为  $k$ -退化图<sup>[4,7]</sup>. 使  $G$  成为  $k$ -退化图的最小非负整数称为  $G$  的退化度, 记为  $D(G)$ .  $k$ -退化图还有如下等价定义:  $G$  为  $k$ -退化图, 当且仅当可以把其顶点排成序列  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , 其中  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 并且对任意  $i$ , 顶点  $v_i$  在诱导子图  $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$  中的度数不超过  $k$ . 这样的序列称为  $G$  的一个  $k$ -删除序列<sup>[2,5]</sup>.

若图  $G$  能画在平面上, 使得其边只在公共端点处相交, 则称  $G$  为平面图. 若平面图  $G$  满足对任意  $u, v \in V(G)$  且  $uv \notin E(G)$ , 图  $G + uv$  都不是平面图, 则称  $G$  为极大平面图. 当  $|V(G)| \geq 3$  时, 极大平面图的每个面都是三角形. 三角剖分平面图  $G$  是指在不改变顶点集的条件向  $G$  添加边, 使所得图成为极大平面图<sup>[3]</sup>. 任意阶数至少为 4 的极大平面图最小度至少为 3, 而任意平面图都有度数不超过 5 的顶点, 因此极大平面图的退化度只能为 3, 4, 5. 由此自然引出以下问题: 给定平面图  $G$  的退化度, 能否控制其三角剖分的退化度?

Bickle<sup>[1]</sup> 系统讨论了这类问题. 对于  $0 \leq k \leq 5$  和  $3 \leq l \leq 5$  的情形, 他给出了如下四个命题.

命题 1: 存在一个退化度为  $k$ 、阶数  $n \geq 4$  的平面图  $G$ , 使得  $G$  存在一个退化度为  $l$  的三角剖分.

命题 2: 对任意退化度为  $k$  的平面图  $G$ ,  $G$  的任意三角剖分的退化度均为  $l$ .

命题 3: 对任意退化度为  $k$ 、阶数  $n \geq f(l)$  的平面图  $G$ ,  $G$  存在一个退化度为  $l$  的三角剖分, 其中  $f(3)=4$ ,  $f(4)=6$ ,  $f(5)=12$ .

命题 4: 存在一个退化度为  $k$ 、阶数  $n \geq 6$  的平面图  $G$ , 使得  $G$  的任意三角剖分的退化度均为  $l$ 。

上述四个命题的判定结果见表 1。表中 T 表示命题成立, F 表示命题不成立, ? 表示该情形在文献<sup>[1]</sup>中尚未确定。由表 1 可见, 命题 4 仅剩  $(k, l) = (2, 5)$  与  $(k, l) = (3, 5)$  两种情形未解决。本文证明其中  $(k, l) = (3, 5)$  情形也成立, 即:

| $k \backslash l$ | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---|---|---|
| 0                | T | T | T |
| 1                | T | T | T |
| 2                | T | T | T |
| 3                | T | T | T |
| 4                | F | T | T |
| 5                | F | F | T |
| 命题 1             |   |   |   |

| $k \backslash l$ | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---|---|---|
| 0                | F | F | F |
| 1                | F | F | F |
| 2                | F | F | F |
| 3                | F | F | F |
| 4                | F | F | F |
| 5                | F | F | T |
| 命题 2             |   |   |   |

| $k \backslash l$ | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---|---|---|
| 0                | T | T | T |
| 1                | T | F | F |
| 2                | F | F | F |
| 3                | F | F | F |
| 4                | F | F | F |
| 5                | F | F | T |
| 命题 3             |   |   |   |

| $k \backslash l$ | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---|---|---|
| 0                | F | F | F |
| 1                | T | F | F |
| 2                | T | T | ? |
| 3                | T | T | ? |
| 4                | F | T | T |
| 5                | F | F | T |
| 命题 4             |   |   |   |

表 1 命题 1-4 的真值表 (据文献<sup>[1]</sup>)

定理 1: 存在一个平面图  $G$ , 满足  $D(G) = 3$ , 且  $G$  的任意三角剖分  $H$  都满足  $D(H) = 5$ 。

## 2 预备知识

定义 2.1: 图  $G$  的  $k$ -核是指  $G$  中满足  $\delta(K) \geq k$  的极大诱导子图<sup>[8]</sup>。若不存在这样的诱导子图, 则称  $G$  不含  $k$ -核。

于是  $G$  是  $k$ -退化的, 当且仅当  $G$  不含  $(k+1)$ -核。特别地, 若某个三角剖分  $H$  含有 5-核, 则  $D(H) \geq 5$ ; 又因  $H$  是平面图,  $D(H) \leq 5$ , 故  $D(H) = 5$ 。

因此, 在后文中, 为了证明某个三角剖分  $H$  的退化度为 5, 我们不再直接计算其退化度, 而是证明  $H$  中存在一个最小度至少为 5 的诱导子图。换言之, 证明的关键在于找到一个 5-核。

引理 2.2: 任意平面图都是 5-退化的。

证明: 设  $G$  为任意非空平面图, 则  $G$  中存在度数不超过 5 的顶点。由于平面图的任意子图仍是平面图, 在每一步剩余图中均可找到一个度数不超过 5 的顶点并将其删除, 从而得到一个 5-删除序列, 故  $G$  是 5-退化的。

下面给出局部六边形结构, 如图 1 所示。除各六边形结构的中心顶点度为 3 外, 其余顶点的度均至少为 5, 而图中未画出与外部顶点的连接情况。引理 2.3 是后文证明任意三角剖分含有 5-核的关键工具。

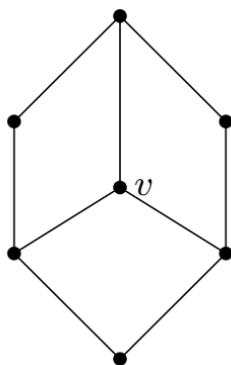


图 1 局部六边形结构的示意

引理 2.3: 设  $Q$  是包含若干个图 1 所示局部六边形结构的平面图。若  $Q'$  是  $Q$  的任意三角剖分, 则  $D(Q') = 5$ 。

证明: 对每个六边形局部结构, 三角剖分只需补入三条对角线, 不计左右对称。由于中心顶点  $v$  原来的度数为 3, 每条新增对角线至多使  $v$  的度数增加 1, 故补边后  $v$  的度数只能为 3、4、5 或 6, 也就只需考虑图 2 中的四种情形  $H_1$ 、 $H_2$ 、 $H_3$ 、 $H_4$ 。在情形  $H_1$  与  $H_2$  中, 中心顶点  $v$  通过补边达到度至少 5, 故保留  $v$ ; 在情形

$H_3$ 与 $H_4$ 中, 中心顶点 $v$ 的度仍小于 5, 则把该中心顶点放入集合 $X$ 。注意到, 当 $v \in X$ 时, 与 $v$ 相邻的局部面在三角剖分中已经补入相应角线; 因此删去 $v$ 虽会使其相邻顶点各失去一条与 $v$ 关联的边, 但这些新增对角线足以补偿这一度数损失。于是删去 $X$ 后, 所有保留顶点的度均至少为 5, 即 $\delta(Q' - X) \geq 5$ 。因此 $Q'$ 含有 5-核, 同时平面图退化度不超过 5, 故 $D(Q') = 5$ 。

具体地, 由图 2 可见, 在情形 $H_3$ 中, 两条不与 $v$ 相接的新增对角线覆盖了 $v$ 的三个原邻点; 在情形 $H_4$ 中, 三个原邻点均与新增对角线关联。因此, 删去 $v$ 后, 每个原邻点失去的一条关联边均可由至少一条新增对角线补偿, 其度数不会降低。每个被删中心顶点仅与其所在局部结构中的外围顶点相邻, 因此删除该中心顶点仅会影响该局部结构内相关顶点的度数; 另一方面, 由三角剖分产生的补偿边也仅位于对应局部结构内部。因此, 不同局部结构之间的补偿分析彼此独立, 可分别应用上述论证。

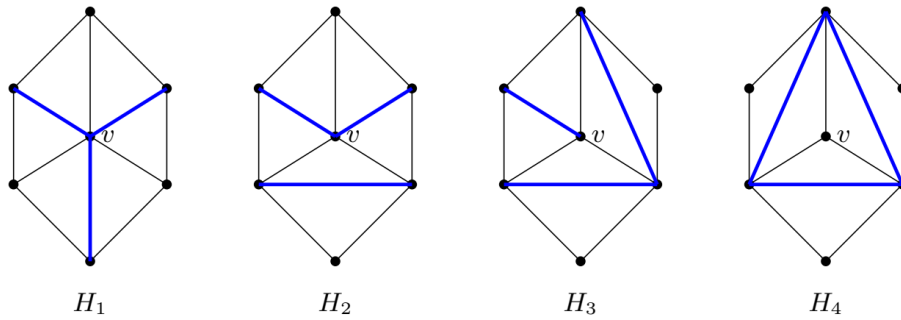


图 2 局部六边形的三角剖分方式 (黑色为原结构, 蓝色边表示三角剖分时添加的边, 若 $d(v) < 5$ , 则 $v \in X$ ; 否则,  $v \notin X$ )

### 3 构造及主要证明

为便于后文引用, 我们这里重述定理 1。

定理 1: 存在一个平面图 $G$ , 满足 $D(G) = 3$ , 且 $G$ 的任意三角剖分 $H$ 都满足 $D(H) = 5$ 。

证明分为三步。首先给出构造图 $G$ ; 其次证明 $G$ 本身是 3-退化的; 最后证明任意三角剖分均含有一个 5-核, 从而三角剖分的退化度只能是 5。

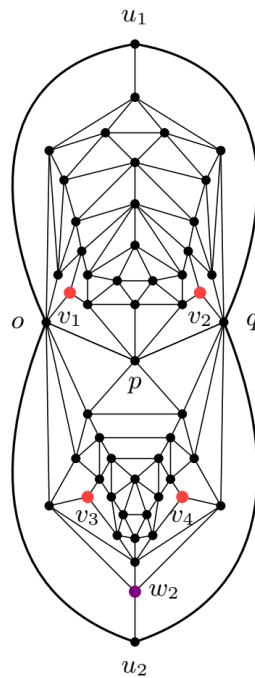


图 3 构造图  $G$  的示意 (特殊顶点  $v_1, v_2, v_3$  和  $v_4$  用红色标出)

我们先给出构造图 $G$ 。图 3 由两个子图 $G_1$ 和 $G_2$ 构成。其中,  $G_1$ 由顶点 $u_1, o, p, q$ 及其内部结构组成,  $G_2$ 由顶点 $u_2, o, p, q$ 及其内部结构组成。两个子图共享顶点集合 $\{o, p, q\}$ 。其中, 除 $u_1, u_2, w_2$ 之外,  $v_1, v_2, v_3, v_4$ 是图 $G$ 中仅有的3-度顶点, 其余顶点的度均不小于5。

图中的顶点 $u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, v_4$ 是控制构造图退化度的关键点。证明 $D(G) = 3$ 时, 我们将利用这些顶点给出一个3-删除序列; 而在证明任意三角剖分含有5-核时, 则根据补边方式删去可能低于5度的顶点, 并检查剩余诱导子图的最小度至少为5。

下面证明构造图满足主要结论所需的两个关键结论。首先说明构造图本身是3-退化的。

引理 3.2: 图 3 所示的构造图 $G$ 满足 $D(G) = 3$ 。

证明: 先证明 $D(G) \leq 3$ 。我们给出一个3-删除序列。按照图 3 所示, 从外层顶点开始逐层向内删除。具体地, 先删除上方子图 $G_1$ 中位于外边界的顶点, 再删除下方子图 $G_2$ 中对应的外边界顶点。每删除一个外层顶点, 其相邻的下一层顶点在当前剩余图中的度数便降为至多3, 因而可以继续删除。若在某一步外层暂无度数不超过3的顶点, 则删除特殊顶点 $v_1, v_2, v_3, v_4$ 。如此从外向内, 最终可删去所有顶点。因此,  $G$ 存在一个3-删除序列, 从而 $D(G) \leq 3$ 。

另一方面, 由图 3 的构造可知 $\delta(G) = 3$ , 故 $D(G) \geq 3$ 。结合 $D(G) \leq 3$ , 得到 $D(G) = 3$ 。

其次说明构造图的任意三角剖分都含有5-核。

设 $H$ 是 $G$ 的任意三角剖分。由于 $H$ 是极大平面图, 其退化度只能取3,4或5。因此, 只需证明 $H$ 含有一个5-核。若 $H$ 含有一个5-核, 则 $D(H) \geq 5$ ; 又由引理 2.2 知 $D(H) \leq 5$ , 故必有 $D(H) = 5$ 。

引理 3.3: 设 $H$ 是构造图 $G$ 的任意三角剖分, 则 $H$ 含有一个5-核。

证明: 注意到, 在图 $G$ 中, 顶点 $u_1, o, u_2, q$ 构成外部面的边界, 且该外部面为一个四边形。由于三角剖分必须向该四边形添加一条对角线, 因此仅有两种可能: 添加边 $oq$ 或添加边 $u_1u_2$ 。故下面分两种情况讨论。

情形 1: 向 $G$ 中加入边 $oq$ , 如图 4 (a) 所示。

令 $e = oq$ 。若要考虑 $G + e$ 的任意三角剖分, 只需考虑 $G_1 + e$ 的任意三角剖分: 若该子图含有5-核, 则 $H$ 也含有5-核。

设 $T_1$ 为 $G_1 + e$ 的任意三角剖分。按顶点 $u_1$ 在 $T_1$ 中的度数分两类, 其代表情形如图 5 所示。

若 $d_{T_1}(u_1) = 5$ , 如图 5 (a) 所示, 则 $T_1$ 中出现两个图 1 所示的六边形局部结构。由引理 2.3, 删去这些局部结构中可能低于5度的指定中心点后, 其余顶点的度均至少为5。故 $T_1$ 含有5-核。

若 $d_{T_1}(u_1) < 5$ , 如图 5 (b) (c) 所示, 则先删去 $u_1$ 。由 $G_1$ 的构造可直接检查, 除 $v_1, v_2$ 外, 其余顶点在 $T_1 - u_1$ 中的度均至少为5; 而 $v_1, v_2$ 正是图 1 中允许作为指定低度点处理的两个局部中心点。因此再次由引理 2.3,  $T_1$ 含有5-核。

综上, 在情形 1 中 $H$ 含有5-核。

情形 2: 向 $G$ 中加入边 $u_1u_2$ , 如图 4 (b) 所示。

此时外部四边形中补入的是对角线 $u_1u_2$ 。在随后对其余非三角形内部面作三角剖分时, 新增对角线可能与 $u_1$ 或 $u_2$ 相连, 因此先按 $u_1$ 在最终三角剖分 $H$ 中的度数分类。由图 6 可知, 此时 $d_H(u_1)$ 只能为4,5,6。

若 $d_H(u_1) = 4$ , 如图 6 (a) 所示, 则只需考虑 $G_1$ 的三角剖分去掉顶点 $u_1$ 后的部分。记该图为 $T_2 - u_1$ 。由构造可知, 除 $v_1, v_2$ 外,  $T_2 - u_1$ 中每个顶点的度均至少为5。将 $v_1, v_2$ 作为引理 2.3 中的指定低度点, 得到该部分含有5-核, 从而 $H$ 含有5-核。

若 $d_H(u_1) = 6$ , 如图 6 (b) 所示, 则直接考虑 $G_1$ 的任意三角剖分 $T_3$ 。此时 $u_1$ 的度数至少为5; 除 $v_1, v_2$ 外,  $T_3$ 中其余顶点的度均至少为5。由引理 2.3,  $T_3$ 含有5-核, 故 $H$ 含有5-核。

若 $d_H(u_1) = 5$ , 如图 6 (c) 所示, 则还需按 $u_2$ 的度数继续分类。此时 $d_H(u_2)$ 只能为4,5,6。

3.1 若 $d_H(u_2) = 4$ , 则删去 $u_1, u_2$ 后, 除 $v_1, v_2, v_3, v_4$ 外的剩余顶点度均至少为 5, 由引理 2.3 得到 5-核。

3.2 若 $d_H(u_2) = 5$ , 则无需删去 $u_1, u_2$ , 只需把 $v_1, v_2, v_3, v_4$ 作为指定低度点, 剩余部分的最小度至少为 5; 再由引理 2.3 可知,  $H$ 含有 5-核。

3.3 若  $d_H(u_2) = 6$ , 则删去  $w_2$ 。此时不会破坏剩余顶点的度数下界。具体地,  $w_2$  为图 6 (c) 中的紫色点; 删去  $w_2$  后, 只需检查与  $w_2$  相邻的顶点。在  $d_H(u_2) = 6$  的这一情形中,  $w_2$  上方和下方的两个邻点原度数均为 6, 删除  $w_2$  后度数仍为 5; 其左上、右上两个邻点虽各失去一条与  $w_2$  关联的边, 但相应新增对角线分别给予补偿, 故度数不降。因此, 删除  $w_2$  后所有剩余顶点的度数仍至少为 5。此时, 除  $v_1, v_2, v_3, v_4$  外的剩余顶点度均至少为 5, 由引理 2.3 得到 5-核。

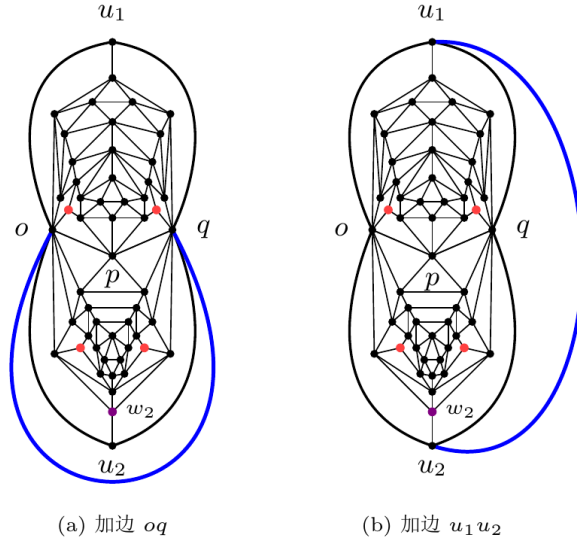


图 4 外部四边形  $u_1ou_2q$  的两种三角剖分情形 (蓝色边表示新增对角线)

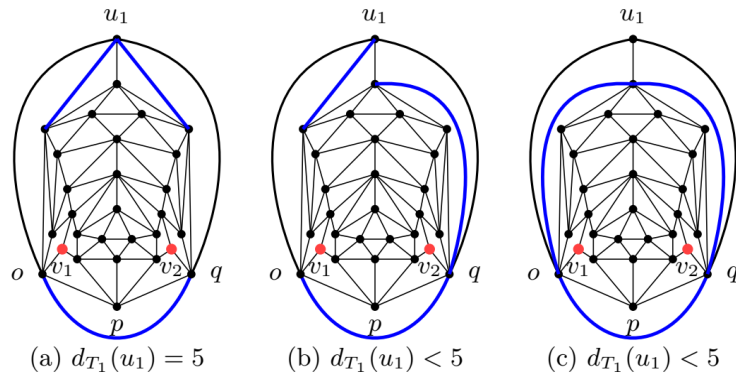


图 5  $G_1 + oq$  的三种代表性三角剖分情形 (蓝色边表示新增补边)

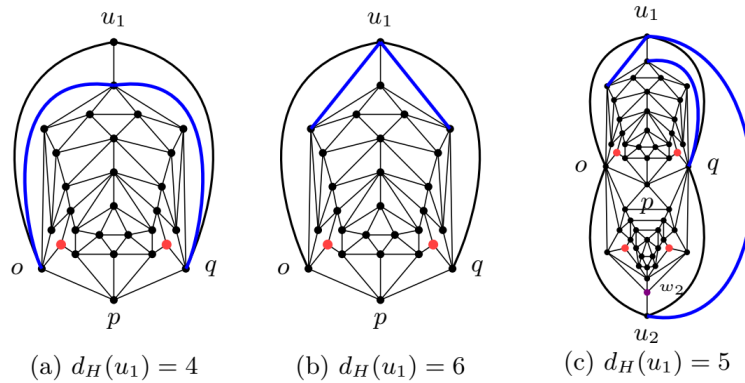


图 6 情形 2 中按  $u_1$  度数分类的代表情形 (蓝色边表示新增补边, 红色点表示  $v_i$ , 紫色点表示  $w_2$ )

两种情形已经覆盖图 $G$ 的所有三角剖分方式, 故任意三角剖分 $H$ 都含有一个5-核。

现在我们可以证明定理 1。

定理 1 的证明: 由引理 3.2, 构造图 $G$ 满足 $D(G) = 3$ 。设 $H$ 是 $G$ 的任意三角剖分。由引理 3.3,  $H$ 含有5-核, 因此 $D(H) \geq 5$ 。另一方面,  $H$ 是平面图, 由引理 2.2 可知 $D(H) \leq 5$ 。于是 $D(H) = 5$ 。这说明构造图 $G$ 即为所需例子。

### 参考文献

- [1] Bickle A. Degeneracies of triangulated graphs[J]. Theory and Applications of Graphs, 2025, 12(2): Article 1.
- [2] Bickle A. Fundamentals of Graph Theory[M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 2020.
- [3] Bickle A. Plane triangulations without spanning 2-trees[J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2023, 85(1): 82-91.
- [4] Bickle A. A survey of maximal k-degenerate graphs and k-trees[J]. Theory and Applications of Graphs, 2024, 0(1): Article 5.
- [5] Krisam N D. Maximal k-degenerate spanning subgraphs[D]. Karlsruhe: Karlsruhe Institute of Technology, 2021.
- [6] Diestel R. 图论: 原书第 5 版[M]. 于青林, 译. 北京: 科学出版社, 2020.
- [7] Lick D R, White A T. k-Degenerate graphs[J]. Canadian Journal of Mathematics, 1970, 22(5): 1082-1096.
- [8] Bickle A. The k-Cores of a Graph[D]. Kalamazoo: Western Michigan University, 2010.

版权声明: ©2026 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS