

中美数学教材中勾股定理内容的比较分析

Shi Chen

纽约哥伦比亚大学教育学院数学教育系 美国

【摘要】最近的研究表明，教材分析是数学教育中重要的复习方法。本研究对中美教材进行了比较分析，以评估学生学习勾股定理相关知识的方式。研究采用 5D 模型，重点关注内容、数学活动、复杂程度、作答形式和语境特征。结果表明，中国教材略微复杂，侧重于证明勾股定理，并向学生呈现实际问题。相比之下，美国教材主要集中于基础数学概念。这些发现表明，美国学生应该解决更多需要深度思考的问题，而中国学生则应该通过练习开放式问题来提高沟通能力。未来的研究可以通过调查更多国家的其他数学材料来丰富文献，从而促进相关教育方法的全球化对话。

【关键词】比较分析；数学；勾股定理；教科书

【收稿日期】2025 年 6 月 13 日 **【出刊日期】**2025 年 7 月 8 日 **【DOI】**10.12208/j.mepr.20250001

Comparative analysis of contents on the pythagorean theorem in mathematics textbooks from America and China

Shi Chen

Department of Mathematics Education, Teachers College, Columbia University, USA

【Abstract】Recent studies have demonstrated that textbook analysis is an essential method of review in mathematics education. This study conducted a comparative analysis of textbooks from America and China to evaluate how students are expected to learn information pertaining to the Pythagorean theorem. This was accomplished using the 5D model approach, specifically focusing on contents, mathematical activities, complexity levels, answering forms, and contextual features. The results showed that Chinese textbooks were slightly more complex, focused on proving the Pythagorean theorem, and presented students with real-life problems. In contrast, American textbooks were mainly concentrated on basic mathematics concepts. These findings suggest that American students should solve more items that require deep thinking, while Chinese students should improve their communication skills by practicing open-ended questions. Future studies can add to the literature by investigating other mathematics materials across a greater number of countries, thus contributing to a more globalized conversation on relevant education methods.

【Keywords】Comparative analysis; Mathematics; Pythagorean theorem; Textbook

1 简介

教材分析是数学教育中一种重要的评价方法（Fan, 2013），在全球范围内有着悠久的历史（Fan et al., 2004）。根据系统的文献综述，许多研究对数学教材进行了分析，旨在阐明其不同地区、不同层次和不同主题下的特征（Ismail & Rosli, 2022）。理解这些因素至关重要，因为教材是数学教

学的主要工具（Pepin et al, 2013），其所包含的材料会影响教师如何描述特定内容，从而支持学生的自主学习（Wardana & Kadah, 2021）。事实上，第三次国际数学与科学研究（TIMSS）报告显示，教师和学生都将超过一半的教学时间花在教材上（Foxman, 1999）。尽管一些美国教师可能并非严格遵循教材，但他们仍然会执行教材中列出的活动、

注：本文于 2024 年发表在 The Educational Review 期刊 8 卷 1 期，为其授权翻译版本。

教学特色和练习。然而, 课堂教学更侧重于课本内容, 而非任何规划好的课程安排 (Howson & Hoemeke, 1996)。相比之下, 中国的数学课堂通过教学研究小组 (TRG) 提供观察和讨论的机会, 并且也更加以课本为基础 (Yang, 2009)。为了进一步探究这些差异, 本研究比较了中美两国教科书的要求和性质, 以阐明学生如何循序渐进地学习基础数学概念。

本研究特别关注广泛教授的勾股定理的相关内容 (Bottema & Erne, 2008; Posamentier, 2010)。如今, 该定理广泛应用于数学、建筑 (Chiotis, 2021) 和科学 (Kalanov, 2014) 等许多学术和专业领域。本分析选择勾股定理作为比较主题, 因为中国和美国的相关学习目标相似。此外, 研究表明, 中国和美国学生不同主题上具有明显的优势和劣势 (Wang & Lin, 2009)。例如, 中国学生在某些函数、分数和统计方面表现更好, 而美国学生则在推理、估算和计算方面表现更好。通过比较旨在帮助学生理解数学思想的教科书中概述的期望, 本研究旨在进一步确定有效的活动并揭示改进当前常规不足的方法。

2 文献综述

2.1 教科书分析

本研究运用多个框架对所选数学教材进行分析。具体而言, 采用了三种方法: (1) 横向分析, 评估教学要素; (2) 纵向分析, 评估数学内容; 以及 (3) 情境分析, 阐明其在数学课堂中的应用 (Rahimah & Visnovska, 2021)。参考其他相关研究, 王等 (2017) 基于 TIMSS 框架创建了五个理解水平, 从而为比较英国和上海的教材提供了清晰的思路。

各种研究已经对其他国际背景下的教材进行了比较。例如, 先前的数据分析表明, 教科书影响了不同国家的学习者学习数学 (Haggarty & Pepin, 2002)。尼泊尔教科书中大多数数学活动对认知需求的要求较低 (Basyal 等, 2022)。(Glasnovic Gracin, 2018) 分析了克罗地亚中学数学教科书, 表明有必要将更多的数学活动纳入多维框架。另一项研究比较了越南和德国教科书, 发现后者更注重鼓励学生探索信息并实际应用内容 (Chi, 2022)。从分布方面来看, 一项研究发现新加坡的教科书比土耳其的教科书更加均衡 (Toprak & Özmantar, 2022)。最后, 对中美

教材的比较研究表明, 美国教材倾向于为学生提供更多撰写论证的机会, 并提出更多样化的问题要求, 而中国教材则倾向于为学生提供更多与现实世界情境联系起来的机会 (Li, 2000; Lo 等, 2021)。总体而言, 只有少数研究对教材进行了分析, 以揭示学生如何提高数学处理技能, 而这正是本文的核心主题。

2.2 流程技能

人们普遍认为, 需要定义一套基本数学技能来补充专业数学科目, 从而促进整体学习 (OCED, 2013)。国际学生评估项目 (PISA) 建立了一个框架, 对这套基本能力进行了修改, 增加了沟通、表征、推理和论证、数学化、设计问题解决方法、使用符号、形式和技术语言及运算以及使用数学工具等因素。PISA 框架影响了许多国家的数学课程, 包括中国 (Qin et al., 2020) 和美国的课程。美国的《学校数学原则与标准》(NCTM) 描述了五种过程技能, 包括沟通、解决问题、表征、推理和联系 (Kilpatrick et al., 2001)。本研究基于前四种过程技能, 重点关注单一内容 (勾股定理)。

2.3 勾股定理的教学与学习

先前的分析发现, 学生成绩不受教学模式的影响 (Hugener 等人, 2009), 而课堂管理、认知激活和学习勾股定理的时间已被证明会直接影响表现 (Lipowsky 等人, 2009)。其他一些研究论文也关注勾股定理教学。例如, 一个教学研究小组的中国教师分析了一节以勾股定理为特色的课程的有效性, 重点关注教师如何安排活动以及学生如何完成活动 (Yang, 2009)。为了发展勾股定理教学, Moutsios-Rentzos 等人 (2014) 采用现象学原理, 通过识别和表达图形符号、数字符号和几何对象之间的联系。另一项研究调查了未来的中学数学教师如何评估学生是否理解某个勾股定理演示 (Zazkis & Zazkis, 2016)。其他研究也提出了一些方法, 帮助数学教师教授勾股定理的证明 (Agarwal, 2020; Crawford, 2001)。早期研究 (Lo, Zhou, & Liu, 1968) 将证明分为代数证明、几何证明、四元证明和动态证明四个部分。然而, 教师仅仅专注于理论证明是不够的 (Wittmann, 2020), 这更强调了实际应用的重要性 (Baki 等人, 2009)。

根据《共同核心州立标准》(G-SR.8), 美国学

生学习运用勾股定理解决直角三角形问题。相比之下,中国学校更注重勾股定理的证明(Huang, 2005; Li, 2019)。鉴于这些不同的方法,本研究提出了两个研究问题,将在下一小节中探讨。

2.4 研究问题

在对数学教材进行比较以明确美国和中国学生如何提高对勾股定理的掌握之前,本研究首先确定了两个明确的研究问题:

中美教科书有何相同点和不同点?

学生可以通过使用各自的教科书来提高哪些过程技能?

3 方法论

3.1 选择教材

本研究采用比较案例法(Stake, 2000)考察勾股定理在美国和中国数学教科书中的运用。勾股定理常见于中国八年级教科书和美国高中几何教科书中。本研究分析了美国教科书《大创意数学:几何》(Larson & Boswell, 2019)和中国九年义务教育教科书《八年级数学》(人民教育出版社, 2012年)。

在中国,教科书必须经中央政府教育系统的批准才能在课堂上使用。大多数地区被迫遵循国家课程,因此根据国家教学大纲使用相同的教科书(Fan & Zhu, 2007)。这本教科书主要在第17章中指出中国课堂学习勾股定理所采用的标准。相比之下,美国使用了许多几何教科书。在本研究中,我们选择了Big Ideas Math出版的教科书,该教科书全面回应了共同核心州立标准。此外,该教科书由Ron Larson博士和Laurie Boswell博士编写,他们是经验丰富的数学教育家,对适合帮助学生实现其目标的活动有着透彻的理解。在此,需要指出的是,本研究采用了探索性案例分析方法,这意味着Big Ideas Math教科书不应推广到其他美国数学教科书。

3.2 分析框架

(Glasnovic Gracin, 2018)提出的5D分析框架,重点关注内容、数学活动、复杂程度、答题方式和情境特征五个方面。在内容部分,本文参考美国和中国教材的相关内容,探讨学习目标(即学生应该理解的具体数学信息),并分析相关数学活动背后的动机。复杂程度部分描述学生完成练习所需技能的难易程度。答题方式部分探讨问题是开放式(即有多个正确答案)还是封闭式(即只有一个有效答

案)。开放式问题更注重沟通能力,而封闭式问题更注重答案。最后,情境特征部分阐述了数学知识如何与现实世界经验相联系。总之,本研究运用5D框架阐明了学生如何根据各自的教材发展数学过程技能。

4 结果

4.1 内容

中国教材将相关章节拆分为勾股定理和其逆定理两部分。两本教材虽然都包含勾股定理的证明,但方法不同。美国教材首先用最简单的方法(Ratner, 2009)证明勾股定理,即将四个全等直角三角形拼成一个大正方形。之后,再用爱因斯坦12岁时提出的三角形相似性原理进行证明(Agarwal, 2020)。除了这两种方法外,中国教材开篇还介绍了一段历史记载,并展示了中国古代数学家赵爽的证明(Agarwal, 2020),同时还提供了一个可供学生拓展阅读的思路,即加菲尔德提出的梯形证明(Agarwal, 2020)。此外,中文教材还提供了费马大定理的历史阅读,帮助学生拓展知识面。

两本教材的复习练习都集中在计算题上。具体来说,中美教材中分别有91.4%和85.7%的练习涉及计算题。这表明两国都利用计算练习来帮助学生掌握勾股定理。此外,中国教材还提供了总结部分,帮助学生反思自己是否掌握了这部分内容。

4.2 数学活动

中国的数学课以教师为中心。有些教师先讲解定理 $a^2 + b^2 = c^2$,然后要求学生阅读课文来论证该定理(Yang, 2009)。由于班级通常只有40名左右的学生,教师尽量保持安静,因此不允许小组作业。相比之下,美国课堂更以学生为中心。在这种模式下,教师会通过提供提示和逐步描述步骤来引导学生的思考过程,就像教科书的第一个活动一样。学生因此能够在构建新的数学知识的同时培养解决问题的能力(Kilpatrick等, 2001)。美国教科书还包含一个交流部分,要求学生讨论勾股定理的证明方法,这有助于学生通过数学语言组织和运用数学思维。在这方面,研究表明,提供鼓励学生日常练习各种交流方式的教育环境至关重要,因为这些应用能够培养重要的生活技能(Sammons, 2018)。

4.3 复杂度级别

美国教材通过图片形式呈现直角三角形,解决

生活中常见的问题。而中国教材则主要鼓励学生自己寻找直角,从而提高他们的解题能力和表征能力。此外,中国教材要求学生在拓展几何题中使用辅助线来完成证明,这进一步提高了学生的解题能力。总体而言,中国教材的难度高于美国教材。

4.4 答题表格

如前所述,中国课堂以讲授为主,复习练习中很少有开放式问题。而美国教材虽然以封闭式问题为主,但也存在五道选择题和开放式问题。

4.5 上下文特征

美国教材包含五道练习题,其中只有一道是生活实际题。而中国教材包含四道生活实际题、一道计算题和一道拓展题。中国教材还包含 35 道复习练习题,其中 11 道是生活实际题;而美国教材包含 42 道复习练习题,其中只有 6 道是生活实际题。对于高中生来说,将数学与生活实际联系起来至关重要(Baki 等, 2009)。正如美国教材所指出的,生活实际题也能帮助学生培养推理和解决问题的能力。

5 结论与讨论

本研究比较了两本教材,分别来自美国和中国,旨在探究学生在学习勾股定理方面所面临的异同。研究结果清晰地表明,两本教材运用了相似的思想,但由于文化和历史差异,其证明方法和练习也有所不同。两本教材的主要区别在于,美国教材强调基础数学概念,而中国教材则强调定理证明。这些发现也揭示了每本教材如何影响学生过程技能的发展。在这方面,中国学生可以通过练习开放式问题(需要运用数学语言)进行交流,从而受益。相比之下,美国学生可以通过练习更具深度思考的问题来获益。通过这些结果,本研究有助于更好地理解教材如何影响学生的过程技能。此外,本研究还首次对旨在教授勾股定理的章节进行了全面的分析调查。在总体考虑理解进步的本质时,同样重要的是要注意每个国家在期望学生发展数学知识的方式上存在的概念差异。在这方面,美国材料倾向于侧重表述,而中国材料则倾向于侧重更深层次的应用。

本研究也存在一些局限性。首先,差异化教学在两国都广泛应用(Eikeland & Ohna, 2022; He, 2022)。教师可以根据学生的表现调整教学方法,也可以提供一些对数学教育有用的补充课堂材料。然而,本研究并未涵盖这些问题。其次,不同国家的学

生学习勾股定理的年龄也不同(中国是初中,美国是高中),这降低了直接比较他们表现的可能性。第三,本研究仅关注一个特定主题(即勾股定理),这限制了其对其他数学主题的推广性。相反,每个案例都应该单独分析。反过来,这些局限性也凸显了一些值得研究的其他领域。例如,补充材料将如何影响学习?目前的结果表明,教科书在数学教育中发挥着重要作用,尤其是在不同国家/地区,因此它们也应该为相关问题的全球对话做出贡献。

6 致谢

Joseph Peter Garrity 博士的耐心和反馈对我来说弥足珍贵。如果没有 Sian Zelbo 博士和 Stuart Weinberg 博士的帮助,我不可能完成这篇研究论文。他们在勾股定理方面的渊博知识和丰富经验,在我的整个学术生涯和生活中给予了我莫大的帮助。我也要感谢我的父母和朋友,是他们始终如一的支持和鼓励,让我得以从事数学教育事业。

参考文献

- [1] Agarwal, R. P. (2020). Pythagorean theorem before and after Pythagoras. *Adv. Stud. Contemporary Mathematics*, 30, (357-389).
- [2] Baki, A., Çatlıoğlu, H., Coştu, S., & Birgin, O. (2009). Conceptions of high school students about mathematical connections to the real-life. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 1(1), 1402-1407. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2009.01.247>.
- [3] Basyal, D., Jones, D. L., & Thapa, M. (2022). Cognitive demand of mathematics tasks in Nepali middle school mathematics textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10269-3>.
- [4] Chi, N. P. (2022). A comparative study of the probability and statistics curricula in the high school mathematics textbooks of Vietnam and Germany. *International Journal of Education and Practice*, 10(2), 69-83. <https://doi.org/10.18488/61.v10i2.2942>.
- [5] Chiotis, E. D. (2021). Pythagoras' mathematics in architecture and his influence on great cultural works. *Scientific Culture. University of the Aegean*, 7(1), 57-77.

- [6] Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, 45(5), 765-777. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6>.
- [7] Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 61-75. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9069-6>.
- [8] Fan, L., Turnau, S., Dole, S., Gelfman, E., Li, Y., Fan, L., Turnau, S., Dole, S., Gelfman, E., Li, Y., & Niss, M. (2004). Eprints, Retrieved from <https://eprints.soton.ac.uk/191815/>. Roskilde University, p. DG14: focus on the development and research of mathematics textbooks (M. Niss, Ed.).
- [9] Foxman, D. (1999). Mathematics textbooks across the world. Some evidence from the third international mathematics and science study. Berkshire: NFER. National Foundation of Educational Research.
- [10] Glasnovic Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: A five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1003-1024. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431849>.
- [11] Haggarty, L., & Pepin, B. (2002). An Investigation of Mathematics Textbooks and their Use in English, French and German Class-rooms: Who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, 28(4), 567-590. <https://doi.org/10.1080/0141192022000005832>.
- [12] He, K. (2022). Chinese-Style flipped classroom: Implementation and relevant cases. In *Innovative education informatization with Chinese characteristics*, (pp. 385-457). https://doi.org/10.1007/978-981-19-0622-0_13.
- [13] Howson, G., & Hoemeke, D. (1996). Review of mathematics textbooks: A comparative study of Grade 8 texts. *Mathematics Teacher*, 89(3), 258-258, Retrieved from <https://www.jstor.org/stable/27969732>.
- [14] Huang, R. (2005). Verification or proof: Justification of Pythagoras' theorem in Chinese mathematics classrooms, Retrieved from <https://eric.ed.gov/?id=ED496905>. In ERIC (Vol. 3). International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- [15] Hugener, I., Pauli, C., Reusser, K., Lipowsky, F., Rakoczy, K., & Klieme, E. (2009). Teaching patterns and learning quality in Swiss and German mathematics lessons. *Learning and Instruction*, 19(1), 66-78. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.02.001>.
- [16] Ismail, F. N., & Rosli, R. (2022). Mathematics education textbook research trends: A systematic literature review. *International Journal of Advanced Research in Education and Society*. <https://doi.org/10.55057/ijares.2022.4.3.12>.
- [17] Kalanov, T. Z. (2014). Critical analysis of the mathematical formalism of theoretical physics. II. Pythagorean theorem. Citeseer.
- [18] Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B., Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, & Division of Behavioral and Social Sciences and Education. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. National Academy Press.
- [19] Larson, R., & Boswell, L. (2019). Geometry: A common Core curriculum. Big Ideas Math, Retrieved from <https://bim.easyaccessmaterials.com/index.php?level=12.00>.
- [20] Li, H. (2019). A comparative study on teaching design of Pythagorean theorem in junior high school. China National Knowledge Infrastructure, Retrieved from <https://cdmd.cnki.com.cn/Article/CDMD-10762-1021544351.htm>.
- [21] Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 234. <https://doi.org/10.2307/749754>.
- [22] Lipowsky, F., Rakoczy, K., Pauli, C., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., & Reusser, K. (2009). Quality of geometry instruction and its short-term impact on students' understanding of the Pythagorean theorem. *Learning and Instruction*, 19(6), 527-537. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.11.001>.

- [23] Lo, J.-J., Zhou, L., & Liu, J. (2021, October) (1968). The Pythagorean Proposition. The introduction and development of triangle con-gruency in Chinese and US textbooks. Proceedings of the Forty-Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Loomis, Classics in Mathematics Education Series, Retrieved from <https://eric.ed.gov/?q=pythagorean+proposition&id=ED037335>. Euroscience. Educational Resources Information Center.
- [24] Moutsios-Rentzos, A., Spyrou, P., & Peteinara, A. (2014). The objectification of the right-angled triangle in the teaching of the Pythag-orean theorem: An empirical investigation. *Educational Studies in Mathematics*, 85(1), 29-51. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9498-y>.
- [25] OCED. (2013). PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy, Retrieved from [https://doi.org/http.OCEDPublishing,\(pp.25-38\)](https://doi.org/http.OCEDPublishing,(pp.25-38)). <https://doi.org/10.1787/9789264190511-en>.
- [26] Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2013). Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice: Two contrasted case studies in France and Norway. *ZDM*, 45(5), 685-698. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0526-2>.
- [27] Posamentier, A. S. (2010). The Pythagorean theorem: The story of its power and beauty, Retrieved from <https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=fHFuCKSrfysC&oi=fnd&pg=PA9&dq=when+does+pythagorean+theorem+discover&ots=3RP4rdTKEy&sig=P3Oja3olDw8x8XvFP82cwRgLw1Y#v=onepage&q=when%20does%20pythagorean%20theorem%20discover&f=false>. In Google Books. Prometheus Books.
- [28] Qin, C., Li, M., & Yan, Z. (2020). Evolution and thinking of PISA mathematical evaluation framework. China academic journal elec-tronic publishing house. <https://doi.org/10.16070/j.cnki.cn45-1388/g4s.2020.43.020>
- [29] Rahimah, D., & Visnovska, J. (2021). Analysis of mathematics textbook use: An argument for combining horizontal, vertical, and con-textual analyses. *Journal of Physics: Conference Series*, 1731(1), 012048. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1731/1/012048>.
- [30] Ratner, B. (2009). Pythagoras: Everyone knows his famous theorem, but not who discovered it 1000 years before him. *Journal of Tar-geting, Measurement and Analysis for Marketing*, 17(3), 229-242. <https://doi.org/10.1057/jt.2009.16>.
- [31] Sammons, L. (2018). Teaching students to communicate mathematically. *Ascd*.
- [32] Stake, R. E. (2000). Case studies. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.) *Handbook of qualitative research*, (pp. 435-454). SAGE.
- [33] Toprak, Z., & Özmantar, M. F. (2022). A comparative study of fifth-grade mathematics textbooks used in Turkey and Singapore. *The Electronic Journal for Research in Science & Mathematics Education*, 26(3), 106-128, Retrieved from <https://ejrsmc.icrsme.com/article/view/21371>.
- [34] Wang, J., & Lin, E. (2009). A meta-analysis of comparative studies on Chinese and US students' mathematics performance: Implica-tions for mathematics education reform and research. *Educational Research Review*, 4(3), 177-195. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2009.06.003>.
- [35] Wang, Y., Barmby, P., & Bolden, D. (2017). Understanding linear function: A comparison of selected textbooks from England and Shanghai. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(1), 131-153. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9674-x>.
- [36] Wardana, M. W., & Kadah, L. (2021). The Feasibility Analysis of Mathematics Textbook Material based on Bell's Criteria. *Hipotenusa: Journal of Mathematical Society*, 3(1), 1-24. <https://doi.org/10.18326/hipotenusa.v3i1.1-24>.
- [37] Wittmann, E. C. (2020). Designing teaching: The Pythagorean theorem. *Connecting Mathematics and Mathematics Education*, 95-160. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3_7.
- [38] Yang, Y. (2009). How a Chinese teacher improved classroom teaching in Teaching Research Group: A case

- study on Pythagoras theorem teaching in Shanghai. *ZDM*, 41(3), 279-296. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0171-y>.
- [39] Zazkis, D., & Zazkis, R. (2016). Prospective teachers' conceptions of proof comprehension: Revisiting a proof of the Pythagorean theorem. *International Journal of Science*

and Mathematics Education, 14(4), 777-803.

<https://doi.org/10.1007/s10763-014-9595-0>.

版权声明：©2025 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS