

运用对称原理解高考数学题例析

冯雅茹, 魏翠萍

扬州大学数学学院 江苏扬州

【摘要】本文基于对称性原理的系统理论,从几何对称、函数对称和代数变元对称三个维度,精选 2024 年高考数学真题中的六道典型试题,系统分析对称性在解题中的应用。通过详细展示对称原理简化问题结构、优化计算过程的核心作用,为数学解题教学提供理论参考和实践案例。

【关键词】对称原理; 高考数学; 函数对称; 几何对称; 变元对称

【收稿日期】2026 年 3 月 14 日 **【出刊日期】**2026 年 4 月 18 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20260005

Analysis of examples of solving college entrance examination mathematics problems by using the symmetry principle

Yaru Feng, Cuiping Wei

School of Mathematical, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】Based on the system theory of symmetry principles, this paper selects six typical questions from the 2024 college entrance examination mathematics test, and systematically analyzes the application of symmetry in problem-solving from three dimensions: geometric symmetry, functional symmetry, and algebraic variable symmetry. By elaborately demonstrating the core role of symmetry principles in simplifying problem structures and optimizing calculation processes, it provides theoretical references and practical cases for mathematics problem-solving teaching.

【Keywords】Symmetry principle; College entrance examination mathematics; Functional symmetry; Geometric symmetry; Variable symmetry

1 引言

对称是我们日常生活中常见的现象,是数学学科非常重要的知识,也是问题求解的一种极其有效的思想方法。徐利治教授指出:“对称性是数学美学的核心体现,也是问题解决的重要突破口。”在高考数学中,对称思想广泛应用于函数、几何、代数等领域,如函数图象的对称性和周期性、几何图形的变换不变性^[1]、代数式的轮换对称性^[2]等。在新课改和新高考的背景下,高考命题愈发重视思想方法的考查,本文将以 2024 年的高考数学试题为例,分类解析对称原理的应用策略。

当前,关于对称思想在数学解题中的应用研究已有相当积累,程璞等人系统分析了 2011 年高考题中对称思想的考查形式与应用价值。杨婷归纳、证明了函数对称性和周期性关系的基本结论,又研究了这些结论在求解相关问题中的应用^[3]。钱从新则指出“对称性原理”的核心思想是“对称的原因必然导致对称的结果,对称的条件必能得出对称的结论”,并提炼出“对称条件—对称结论—简化求解”的解题策略^[4]。刘彦学等人归纳了数学中数、式、命题、运算、几何的对称性^[5]。范一平详细例析了两道题目中的对称思想的应用^[6]。郑伟超分析了反比例函数图象的对称性,又探究了反比例函数图象的对称性在解题中的应用^[7]。王明刚重点研究分析了四道题目的对称性,其中三道为几何对称题,一道为概率中的轮换对称性^[8]。

据目前的研究现状分析,在已有的研究中缺少 2024 年的高考真题对称性分析,因此本文聚焦于 2024 年高考真题,通过精选典型试题进行深度解析,旨在更清晰地展示对称性原理在简化问题结构、洞察问题本质

方面的独特优势, 为数学解题教学与学习提供参考。

2 对称性分类

根据刘彦学, 徐章韬归纳的数学中数、式、命题、运算、几何的对称性^[4], 本文重点研究三类:

几何的对称性: 图形关于点的中心对称、关于直线的轴对称、关于平面的空间对称;

函数对称: 轴对称、中心对称、周期性、奇偶性;

代数变元对称: 多项式在变元置换下不变, 如 $x+y+z$ 的轮换对称性。

3 高考真题的对称性解析

3.1 几何对称

例题 1 (2024 年全国甲卷理 · 12) 已知 b 是 a 、 c 的等差中项, 直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $x^2+y^2+4y-1=0$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. $2\sqrt{5}$

对称分析: 由 $a-2b+c=0$ 得直线恒过定点 $P(1, -2)$, 圆的方程化为 $x^2+(y+2)^2=5$, 利用圆的对称性, 弦长 $|AB|$ 都可以被某条过圆心的直线平分, 因此将问题简化为计算 $\frac{|AB|}{2}$ 的长度, 即利用弦长公式计算。

解题过程: 因为 b 是 a, c 的等差中项, 所以 $2b=a+c$, 故 $c=2b-a$, 代入公式 $ax+by+c=0$ 得 $ax+by+2b-a=0$, 即 $a(x-1)+b(y+2)=0$, 所以该直线过定点 $P(1, -2)$, 具体见图 1, 利用圆的对称性,

弦长 $|AB|$ 都可以被某条过圆心的直线平分, 因此将问题简化为计算 $\frac{|AB|}{2}$ 的长度, $\frac{|AB|}{2} = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{5 - d^2}$, 要使 $\frac{|AB|}{2}$ 最小, 只需 d 最大, 如图, 当 AB 绕点 P 旋转时, 总有 $d \leq d'$, 当且仅当 AB 与图中 $A'B'$ 重合时取等号, 此时, $AB \perp CP$, 所以 $d_{\max} = |CP| = 1$, 故 $|AB|_{\min} = 2\sqrt{5-1^2} = 4$, 选 C。

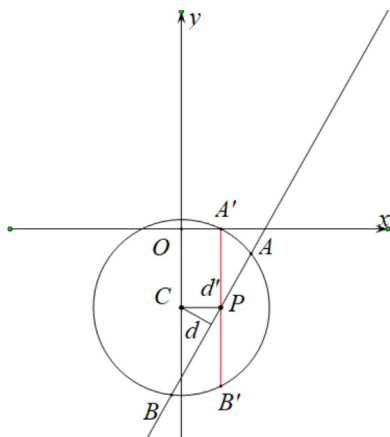


图 1

例题 2 (2024 年新课标 I 卷 · 12) 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A, B 两点, 若 $|F_1A| = 13, |AB| = 10$, 则 C 的离心率为_____。

对称分析: 该双曲线关于 x 轴对称, 故 A, B 纵坐标互为相反数, 利用对称性建立坐标关系, 结合双曲线定义简化计算。

解题过程: 由题可知 A, B, F_2 三点横坐标相等, 设 A 在第一象限, 在直角坐标系中作出双曲线, 见图 2, 将 $x=c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 得 $y = \pm \frac{b^2}{a}$, 双曲线关于 x 轴对称, 故 A, B 纵坐标互为相反数, 利用对称性建立坐标关系, 即 $A\left(c, \frac{b^2}{a}\right), B\left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$, 故 $|AB| = \frac{2b^2}{a} = 10$, $|AF_2| = \frac{b^2}{a} = 5$, 又 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$, 得 $|AF_1| = |AF_2| + 2a = 2a + 5 = 13$, 解得 $a = 4$, 代入 $\frac{b^2}{a} = 5$ 得 $b^2 = 20$, 故 $c^2 = a^2 + b^2 = 36$, 即 $c = 6$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, 故答案为 $\frac{3}{2}$ 。

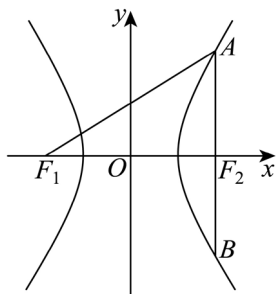
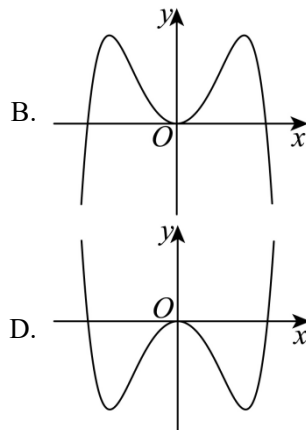
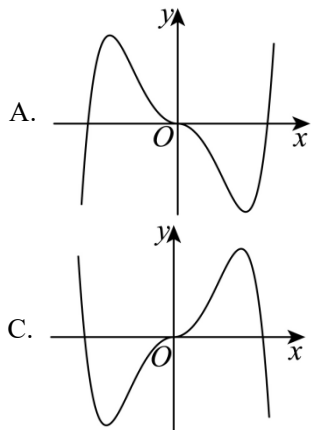


图 2

3.2 函数对称

例题 3(2024 年全国甲卷理 7) 函数 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 在区间 $[-2.8, 2.8]$ 的大致图像为()



对称分析: 由选项可以看出, 四个选项均为对称图象, 其中 A, C 是关于原点中心对称, B, D 是关于 y 轴轴对称, 因此要分析 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 的奇偶性, 利用排除法简化计算。

解题过程: $f(-x) = -x^2 + (e^{-x} - e^x)\sin(-x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x = f(x)$, 所以函数 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 在定义域 $[-2.8, 2.8]$ 上为偶函数, 可排除 A, C , 又 $f(1) = -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right)\sin 1 > -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right)\sin \frac{\pi}{6} = \frac{e}{2} - 1 - \frac{1}{2e} > \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} > 0$, 故可排除 D , 最后答案为 B 。

例题 4(2024 年全国甲卷文 12) 函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值是_____。

对称分析: 三角函数 $a\sin x + b\cos x$ 可转化为 $R\sin(x + \varphi)$ 的形式, 其函数图象具有周期性对称, 最大

值出现在对称轴 $x = \frac{\pi}{2} - \varphi$ 处, 因此需要找该函数在 $[0, \pi]$ 上的对称轴, 由此简化计算。

解题过程: 将该函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 变形得到类似 $R \sin(x + \varphi)$ 的形式为 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, 当 $x \in [0, \pi]$ 时, $x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, 利用正弦函数的对称性可得 $\sin \theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 处取最大值 1, 又 $x \in [0, \pi]$, 因此 $k = 1$, 此处的 $\theta = x - \frac{\pi}{3}$, 令 $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ 时, 得到 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, 即函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值是 2, 故答案为 2。

3.3 代数变元对称

例题 5 (2024 年全国甲卷理 · 23) 实数 a, b 满足 $a + b \geq 3$ 。

(1) 证明: $2a^2 + 2b^2 > a + b$;

(2) 证明: $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq 6$ 。

对称分析: 表达式是关于 a, b 轮换对称的, 通过构造对称式 $2a^2 + 2b^2 - (a + b)$, 结合基本不等式进行放缩, 简化计算。

解题过程: (1) 因为 $2a^2 + 2b^2 - (a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$, 当 $a = b$ 时等号成立, 则 $2a^2 + 2b^2 \geq (a + b)^2$, 因为 $a + b \geq 3$, 所以 $2a^2 + 2b^2 \geq (a + b)^2 > a + b$;

(2) $|a - 2b^2| + |b - 2a^2| \geq |a - 2b^2 + b - 2a^2| = |2a^2 + 2b^2 - (a + b)|$
 $= 2a^2 + 2b^2 - (a + b) \geq (a + b)^2 - (a + b) = (a + b)(a + b - 1) \geq 3 \times 2 = 6$

例题 6 (2024 年全国甲卷理 · 16) 有 6 个相同的球, 分别标有数字 1、2、3、4、5、6, 从中不放回地随机抽取 3 次, 每次取 1 个球。记 m 为前两次取出的球上数字的平均值, n 为取出的三个球上数字的平均值, 则 m 与 n 差的绝对值不超过 $\frac{1}{2}$ 的概率是_____。

对称分析: 这是概率问题的对称计数问题, 设前两个球的号码为 a, b , 第三个球的号码为 c , 则 $\left|\frac{a+b}{2} - \frac{a+b+c}{3}\right| \leq \frac{1}{2}$, 化简得 $a + b - 3 \leq 2c \leq a + b + 3$, 利用球号轮换对称性, 即任意数字出现在任意位置的概率相同, 就 c 的不同取值分类讨论后可求随机事件的概率。

解题过程: 从 6 个不同的球中不放回地抽取 3 次, 共有 $A_6^3 = 120$ 种, 设前两个球的号码为 a, b , 第三个球的号码为 c , 则 $\left|\frac{a+b}{2} - \frac{a+b+c}{3}\right| \leq \frac{1}{2}$, 故 $|2c - (a + b)| \leq 3$, 故 $-3 \leq 2c - (a + b) \leq 3$, 故 $a + b - 3 \leq 2c \leq a + b + 3$ 。

若 $c = 1$, 则 $a + b \leq 5$, 则 (a, b) 为: $(2, 3)$ 利用球号轮换对称性得到后 1 种为 $(3, 2)$, 故有 2 种;

若 $c = 2$, 则 $1 \leq a + b \leq 7$, 则 (a, b) 为: $(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 4)$, 利用球号轮换对称性得到后 5 种为 $(3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (4, 3)$, 故有 10 种;

当 $c = 3$, 则 $3 \leq a + b \leq 9$, 则 (a, b) 为:

$(1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 5)$, 利用球号轮换对称性得到后 8 种为 $(2, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (5, 4)$, 故有 16 种;

当 $c = 4$, 则 $5 \leq a + b \leq 11$, 同理有 16 种;

当 $c = 5$, 则 $7 \leq a + b \leq 13$, 同理有 10 种;

当 $c = 6$, 则 $9 \leq a + b \leq 15$, 同理有 2 种;

共 m 与 n 的差的绝对值不超过 $\frac{1}{2}$ 时不同的抽取方法总数为 $2(2+10+16) = 56$, 故所求概率为

$$\frac{56}{120} = \frac{7}{15}, \text{ 所以答案为 } \frac{7}{15}.$$

4 教学启示与学习建议

(1) 通过分析 2024 年该六道高考真题的对称性在解题中的应用, 教师和学生可以直观感受对称性在高考题目中的体现, 从而形成更加系统的解题策略;

(2) 教师在几何、函数、代数教学中渗透对称思想, 引导学生识别问题中的对称条件;

(3) 学生要进行分类训练, 熟悉每种类型下会有什么对称条件, 能得到什么对称结论。

5 结论

本文系统探讨了对称思想在高考数学解题中的应用机制, 通过对 2024 年高考真题分析, 可以发现对称原理在高考数学中的重要性, 希望对教师教学、学生学习提供帮助。

参考文献

- [1] 程璞, 宁连华. 结构对称性质优巧用对称解疑难——以 2011 年全国各地高考题为例谈对称思想的妙用[J]. 中学数学月刊, 2012, (01): 48-50.
- [2] 陈应全, 刘国亮. 函数对称性的高考命题动向[J]. 高中数学教与学, 2023, (09): 42-44.
- [3] 杨婷. 利用函数对称性与周期性的关系解题[J]. 高中数学教与学, 2022, (19): 14-16.
- [4] 钱从新. 运用对称性原理解题[J]. 数学教学, 2009(2): 32-34.
- [5] 刘彦学, 徐章韬. 作为数学欣赏的对称[J]. 中学数学, 2014, (11): 51-53.
- [6] 范一平. 对称的条件必能得出对称的结论——例析一类对称性试题的解题思路[J]. 中小学数学(初中版), 2014, (Z2): 85-86.
- [7] 郑伟超. 反比例函数图象的对称性在解题中的应用[J]. 数理化解题研究, 2025, (11): 59-61.
- [8] 王明刚. 巧用对称思想妙解题[J]. 高中数理化, 2025, (07): 40-41.

版权声明: ©2026 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS