

高阶 Heisenberg 方程的贝克隆变换

顾佳鑫, 刘金永, 马骏飞, 曹锡芳

扬州大学数学科学学院 江苏扬州

【摘要】 高阶 Heisenberg 方程作为非线性科学和数学物理领域的重要模型, 其解的结构和动力学行为一直是研究热点。本研究基于贝克隆变换理论, 构建了高阶 Heisenberg 方程的贝克隆变换, 并将其作用于平凡解而成功生成了呼吸子解和孤子解。通过详细分析, 揭示了这些解在单位球面上的轨迹曲线具有自交点序列且收敛于北极点的特性。研究结果为深入理解高阶 Heisenberg 方程的解结构和动力学行为提供了新视角, 对非线性科学和数学物理领域的相关研究具有重要参考价值。

【关键词】 Heisenberg 方程; 贝克隆变换; 呼吸子解; 孤子解

【基金项目】 2024 年扬州大学大学生科创基金 (XCX20240252)

【收稿日期】 2025 年 2 月 18 日 **【出刊日期】** 2025 年 3 月 15 日 **【DOI】** 10.12208/j.aam.20250001

Bäcklund transformation for the higher-order Heisenberg equation

Jiixin Gu, Jinyong Liu, Junfei Ma, Xifang Cao

School of Mathematical Science, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 The higher-order Heisenberg equation is a significant model in the fields of nonlinear science and mathematical physics. The study of its solution structures and dynamical behaviors has always been a hot research area. In this paper, we first construct Bäcklund transformation for the higher-order Heisenberg equation, and then by applying it to a trivial solution, we successfully generate breather and soliton solutions. Through detailed analysis, we reveal that the trajectory curve of these solutions on the unit sphere exhibits a sequence of self-intersection points, which finally converges toward the north pole. The results of this paper provide a new insight into its solution structures and dynamical behaviors, and hold significant reference value for related research in nonlinear science and mathematical physics.

【Keywords】 Heisenberg equation; Bäcklund transformation; Breather solution; Soliton solution

1 引言

Landau-Lifshitz 方程^[1,2,3]作为描述铁磁体磁化动力学的经典模型, 其无阻尼项(1+1)-维形式即是著名的 Heisenberg 方程^[4,5]

$$S_t = S \times S_{xx}, \quad (1)$$

其中 $S=(s_1, s_2, s_3)$ 是单位磁化强度向量 ($s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$)。近年来, 关于 Heisenberg 方程的研究取得了诸多重要成果。例如, Lakshmanan 等^[6]建立了 Heisenberg 方程和空间曲线可积运动之间的联系, Zakharov 等^[7]证明了 (1) 和非线性 Schrödinger 方程

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2q = 0 \quad (2)$$

之间的规范等价性。另一方面, Rogers 等^[8]构造了 Heisenberg 序列, 其中第一个方程即为 (1), 而第二个方程具有如下形式

$$S_t = \frac{1}{4}S_{xxx} + \frac{3}{8}(S_x^2 S)_x. \quad (3)$$

文献[9]和[10]给出了其它形式的 Heisenberg 序列。方程 (3) 可以改写成

$$\begin{cases} s_{1t} = \frac{1}{4}s_{1xxx} + \frac{3}{8}[s_1(s_{1x}^2 + s_{2x}^2 + s_{3x}^2)]_x, \\ s_{2t} = \frac{1}{4}s_{2xxx} + \frac{3}{8}[s_2(s_{1x}^2 + s_{2x}^2 + s_{3x}^2)]_x, \\ s_{3t} = \frac{1}{4}s_{3xxx} + \frac{3}{8}[s_3(s_{1x}^2 + s_{2x}^2 + s_{3x}^2)]_x, \end{cases} \quad (4)$$

其 Lax 对为

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi, \quad (5)$$

其中

$$U = \lambda S, \quad V = \lambda^3 S + \frac{\lambda^2}{2}SS_x + \frac{\lambda}{8}(3SS_x^2 + 2S_{xx}), \quad (6)$$

S 是二阶方阵

$$S = \begin{pmatrix} s_3 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & -s_3 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

λ 为谱参数。利用上述 Lax 对, 文献[9]和[11]给出了方程 (4) 的达布变换。然而, 对于高阶 Heisenberg 方程的研究仍处于探索阶段, 其解的结构和动力学行为尚未得到充分揭示。因此, 开展高阶 Heisenberg 方程的贝克隆变换研究, 探索其解的性质, 具有重要的理论意义和应用价值。本文首先给出方程 (4) 的贝克隆变换, 并将该变换作用于平凡解而生成呼吸子解和孤子解。本文还揭示了所得解在单位球面上的轨迹曲线的一个性质。

2 贝克隆变换

为了得到方程 (4) 的贝克隆变换, 我们首先定义伪势^[12]。为此, 令

$$\varphi = \frac{f}{g}, \quad (8)$$

其中 f 和 g 由 Lax 对 (5) 中的特征函数 $\Psi = (f, g)^T$ 确定。再令

$$\varphi = p + iq, \quad \lambda = a + ib. \quad (9)$$

这样我们就有两个实伪势 p 和 q , 谱参数是 a 和 b 。注意到对于方程 (4) 的已知解 (s_1, s_2, s_3) , 由于 $\Psi = (f, g)^T$ 满足 Lax 对 (5), 相应地 p 和 q 满足一个可解系统。下面的定理给出了方程 (4) 的贝克隆变换 $(s_1, s_2, s_3) \mapsto (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3)$:

定理 1 对于方程 (4) 的解 (s_1, s_2, s_3) , 令 (p, q) 是由 Lax 对 (5) 确定的相应可解系统的解。定义

$$\begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \\ \tilde{s}_3 \end{pmatrix} = (T + R) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

其中 $T = (T_{ij})_{3 \times 3}$ 和 $R = (R_{ij})_{3 \times 3}$ 分别是对称矩阵和反对称矩阵, 相应的元素为

$$T_{11} = \frac{(b^2 - a^2)(1 + p^2 + q^2)^2 + 8a^2p^2}{(a^2 + b^2)(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad (11)$$

$$T_{22} = \frac{(b^2 - a^2)(1 + p^2 + q^2)^2 + 8a^2q^2}{(a^2 + b^2)(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad (12)$$

$$T_{33} = 1 - \frac{8a^2(p^2 + q^2)}{(a^2 + b^2)(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad (13)$$

$$T_{12} = T_{21} = \frac{8a^2pq}{(a^2 + b^2)(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad (14)$$

$$T_{13} = T_{31} = \frac{4a^2p(p^2 + q^2 - 1)}{(a^2 + b^2)(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad (15)$$

$$T_{23} = T_{32} = \frac{4a^2q(1 - p^2 - q^2)}{(a^2 + b^2)(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad (16)$$

$$R_{12} = -R_{21} = \frac{2ab((p^2 + q^2)^2 - 1)}{(a^2 + b^2)(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad (17)$$

$$R_{13} = -R_{31} = \frac{4abq(p^2 + q^2 + 1)}{(a^2 + b^2)(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad (18)$$

$$R_{23} = -R_{32} = \frac{4abp(p^2 + q^2 + 1)}{(a^2 + b^2)(1 + p^2 + q^2)^2}. \quad (19)$$

则 $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3)$ 也是方程(4)的解。

证明 对于 $j = 1, 2, 3$,

$$\tilde{s}_{jt} = \sum_{k=1}^3 [(T_{jkt} + R_{jkt})s_k + (T_{jk} + R_{jk})s_{kt}], \quad (20)$$

$$\tilde{s}_{jx} = \sum_{k=1}^3 [(T_{jkx} + R_{jkx})s_k + (T_{jk} + R_{jk})s_{kx}], \quad (21)$$

$$\tilde{s}_{jxx} = \sum_{k=1}^3 [(T_{jkxx} + R_{jkxx})s_k + 2(T_{jkx} + R_{jkx})s_{kx} + (T_{jk} + R_{jk})s_{kxx}], \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{jxxx} = & \sum_{k=1}^3 [(T_{jkxxx} + R_{jkxxx})s_k + 3(T_{jkxx} + R_{jkxx})s_{kx} \\ & + 3(T_{jkx} + R_{jkx})s_{kxx} + (T_{jk} + R_{jk})s_{kxxx}]. \end{aligned} \quad (23)$$

将 $\tilde{s}_j, \tilde{s}_{jt}, \tilde{s}_{jx}, \tilde{s}_{jxx}, \tilde{s}_{jxxx}$ 代入(4), 经过繁琐的计算即可验证 $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3)$ 满足方程(4)。为了简洁起见, 我们略去具体计算过程。

将方程(4)的平凡解 $(s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 1)$ 代入 Lax 对(5), 并利用(9), 则可得到关于 p 和 q 的可解系统:

$$\begin{cases} p_x = 2ap - 2bq, \\ q_x = 2aq + 2bp, \\ p_t = 2a(a^2 - 3b^2)p + 2b(b^2 - 3a^2)q, \\ q_t = 2a(a^2 - 3b^2)q - 2b(b^2 - 3a^2)p. \end{cases} \quad (24)$$

求解(24)得到

$$p = e^\xi (c_2 \cos \eta - c_1 \sin \eta), \quad q = e^\xi (c_2 \sin \eta + c_1 \cos \eta), \quad (25)$$

其中 c_1, c_2 是任意实常数,

$$\xi = 2a(x + (a^2 - 3b^2)t), \quad \eta = 2b(x - (b^2 - 3a^2)t). \quad (26)$$

利用定理 1, 将上述贝克隆变换作用于平凡解 $(s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 1)$ 即可得到方程(4)的新解 $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \tilde{s}_3)$, 其中

$$\tilde{s}_1 = \frac{4abq(p^2 + q^2 + 1) + 4a^2p(p^2 + q^2 - 1)}{(a^2 + b^2)(p^2 + q^2 + 1)^2}, \quad (27)$$

$$\tilde{s}_2 = \frac{4abp(p^2 + q^2 + 1) - 4a^2q(p^2 + q^2 - 1)}{(a^2 + b^2)(p^2 + q^2 + 1)^2}, \quad (28)$$

$$\tilde{s}_3 = 1 - \frac{8a^2(p^2 + q^2)}{(a^2 + b^2)(p^2 + q^2 + 1)^2}. \quad (29)$$

(27) 和 (28) 是呼吸子解, 而 (29) 是单孤子解。当 $a = 1, b = 9, c_1 = 0, c_2 = 1$ 时, 它们 $t = 0$ 处的波形见图 1。

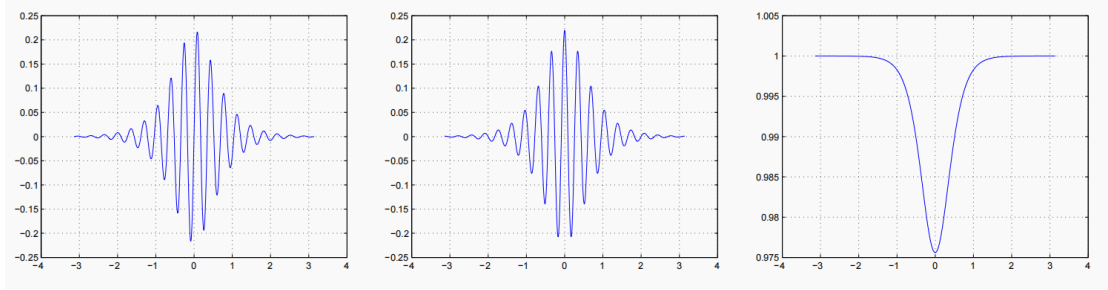


图 1 呼吸子解和孤子解

3 轨迹曲线

在任意固定时间 t , 上节得到的解 $\mathbf{r}(x) = (\tilde{s}_1(x), \tilde{s}_2(x), \tilde{s}_3(x))$ 在单位球面上的轨迹曲线具有如下性质:

定理 2 由 (27), (28) 和 (29) 确定的每一条轨迹曲线上存在一个自交点序列, 该序列最终收敛到点 $(0,0,1)$ 。从几何角度看, 这些自交点序列可以理解为磁化强度向量在单位球面上螺旋上升过程中的周期性交点。随着参数的增大, 螺旋的间距逐渐减小, 交点逐渐向北极点 $(0,0,1)$ 靠近。图 2 展示了包含前三个自交点的轨迹曲线, 从图中可以看出, 随着参数的增大, 自交点确实呈现出向北极点收敛的趋势。这种几何特性不仅为理论分析提供了直观支持, 也为进一步研究解的动力学行为奠定了基础。

证明 由 (25) 得到

$$p^2 + q^2 = (c_1^2 + c_2^2)e^{2\xi}. \quad (30)$$

由于系统 (4) 在关于 x 的平移变换下不变, 不失一般性, 可假设

$$c_1^2 + c_2^2 = 1, \quad c_1 = \sin \alpha, \quad c_2 = \cos \alpha, \quad (31)$$

其中 α 是常数。则

$$p = e^\xi u, \quad u = \cos(\eta + \alpha), \quad (32)$$

$$q = e^\xi v, \quad v = \sin(\eta + \alpha), \quad (33)$$

于是由 (27) 和 (28) 得到

$$\tilde{s}_1(\xi) = \frac{4ae^\xi}{(a^2 + b^2)(1 + e^{2\xi})^2} (a(e^{2\xi} - 1)u + b(e^{2\xi} + 1)v), \quad (34)$$

$$\tilde{s}_2(\xi) = \frac{4ae^\xi}{(a^2 + b^2)(1 + e^{2\xi})^2} (b(e^{2\xi} + 1)u - a(e^{2\xi} - 1)v), \quad (35)$$

而由 (29) 得到

$$\tilde{s}_3(\xi) = 1 - \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \operatorname{sech}^2 \xi = \tilde{s}_3(-\xi). \quad (36)$$

因此, 为了得到轨迹曲线上的自交点, 我们只需找到满足条件 $\tilde{s}_1(-\xi) = \tilde{s}_1(\xi)$ 和 $\tilde{s}_2(-\xi) = \tilde{s}_2(\xi)$ 的 ξ 值。为此, 考虑变换 $\xi \rightarrow -\xi$ 。则由 (26) 得到

$$\eta \rightarrow \eta' = -\eta + \omega, \quad \omega = 8b(a^2 + b^2)t, \quad (37)$$

并且

$$c_2 \cos \eta' - c_1 \sin \eta' = (c_2 \cos \omega - c_1 \sin \omega) \cos \eta + (c_2 \sin \omega + c_1 \cos \omega) \sin \eta, \quad (38)$$

$$c_2 \sin \eta' + c_1 \cos \eta' = (c_1 \sin \omega - c_2 \cos \omega) \sin \eta + (c_2 \sin \omega + c_1 \cos \omega) \cos \eta. \quad (39)$$

令

$$c'_2 = c_2 \cos \omega - c_1 \sin \omega, \quad c'_1 = c_2 \sin \omega + c_1 \cos \omega. \quad (40)$$

则

$$c'^2_2 + c'^2_1 = 1, \quad c'_2 = \cos \alpha', \quad c'_1 = \sin \alpha', \quad (41)$$

其中 α' 是与 x 无关的常数。因此在变换 $\xi \rightarrow -\xi$ 下,

$$p \rightarrow p' = e^{-\xi} u', \quad u' = \cos(-\eta + \alpha'), \quad (42)$$

$$q \rightarrow q' = e^{-\xi} v', \quad v' = \sin(-\eta + \alpha'). \quad (43)$$

将 p' 和 q' 代入 (27) 和 (28) 得到

$$\tilde{s}_1(-\xi) = \frac{4ae^\xi}{(a^2 + b^2)(1 + e^{2\xi})^2} (a(1 - e^{2\xi})u' + b(1 + e^{2\xi})v'), \quad (44)$$

$$\tilde{s}_2(-\xi) = \frac{4ae^\xi}{(a^2 + b^2)(1 + e^{2\xi})^2} (b(1 + e^{2\xi})u' - a(1 - e^{2\xi})v'). \quad (45)$$

于是由 $\tilde{s}_1(-\xi) = \tilde{s}_1(\xi)$, $\tilde{s}_2(-\xi) = \tilde{s}_2(\xi)$ 得到关于 u' 和 v' 的线性方程

$$a(1 - e^{2\xi})u' + b(1 + e^{2\xi})v' = a(e^{2\xi} - 1)u + b(e^{2\xi} + 1)v, \quad (46)$$

$$b(1 + e^{2\xi})u' - a(1 - e^{2\xi})v' = b(e^{2\xi} + 1)u - a(e^{2\xi} - 1)v, \quad (47)$$

其解为

$$u' = \frac{(b^2(e^{2\xi} + 1)^2 - a^2(e^{2\xi} - 1)^2)u + 2ab(1 - e^{4\xi})v}{b^2(e^{2\xi} + 1)^2 + a^2(e^{2\xi} - 1)^2}, \quad (48)$$

$$v' = \frac{(b^2(e^{2\xi} + 1)^2 - a^2(e^{2\xi} - 1)^2)v - 2ab(1 - e^{4\xi})u}{b^2(e^{2\xi} + 1)^2 + a^2(e^{2\xi} - 1)^2}. \quad (49)$$

记 (48) 和 (49) 右边 u 和 v 的系数为

$$\sin \theta = \frac{b^2(e^{2\xi} + 1)^2 - a^2(e^{2\xi} - 1)^2}{b^2(e^{2\xi} + 1)^2 + a^2(e^{2\xi} - 1)^2}, \quad \cos \theta = \frac{2ab(1 - e^{4\xi})}{b^2(e^{2\xi} + 1)^2 + a^2(e^{2\xi} - 1)^2}. \quad (50)$$

则

$$\cos(-\eta + \alpha') = \sin(\eta + \alpha + \theta), \quad \sin(-\eta + \alpha') = -\cos(\eta + \alpha + \theta), \quad (51)$$

于是

$$\eta + \alpha + \theta = \frac{\pi}{2} + (-\eta + \alpha'), \quad (52)$$

或等价地

$$\theta = \frac{\pi}{2} + (-2\eta - \alpha + \alpha'), \quad (53)$$

从而

$$\cos(2\eta + \alpha - \alpha') = \frac{b^2(e^{2\xi} + 1)^2 - a^2(e^{2\xi} - 1)^2}{b^2(e^{2\xi} + 1)^2 + a^2(e^{2\xi} - 1)^2}. \quad (54)$$

由 (26) 得到

$$\eta = \frac{b}{a}\xi + 4b(a^2 + b^2)t. \quad (55)$$

由于 (54) 两边关于 ξ 连续, 对于每一个整数 k , 存在唯一的

$$\xi_k \in \left(\frac{a}{2b}k\pi - \delta, \frac{a}{2b}(k+1)\pi - \delta \right], \quad (56)$$

其中 $\delta = 4a(a^2 + b^2)t + a(\alpha - \alpha')/(2b)$, 使得 (50) 在 ξ_k 处成立。于是

$$\tilde{s}_1(-\xi_k) = \tilde{s}_1(\xi_k), \quad \tilde{s}_2(-\xi_k) = \tilde{s}_2(\xi_k), \quad \tilde{s}_3(-\xi_k) = \tilde{s}_3(\xi_k), \quad (57)$$

轨迹曲线上的自交点为

$$P_k = (s_1(\xi_k), s_2(\xi_k), s_3(\xi_k)). \quad (58)$$

由 (27), (28), (29) 容易验证

$$\lim_{\xi_k \rightarrow \infty} P_k = (0, 0, 1), \quad (59)$$

即当 ξ_k 趋于无穷大时自交点 $\{P_k\}$ 趋于北极 $(0, 0, 1)$ 。

作为例证, 我们讨论当 $a = 1, b = 9, c_1 = 0, c_2 = 1$ 时在 $t = 0$ 处的轨迹曲线。当 $x = 0$ 时, 初始点位于 $(0, 9/41, 40/41)$ 。随着 $|x|$ 增大, 磁化强度向量沿着两个相反的方向螺旋上升, 并且在单位球面上周期性地自交。 $|x|$ 的值越大, 自交的周期越小。当 x 趋于无穷时, 自交点趋于北极 $(0, 0, 1)$ 。图 2 给出了包含前三个自交点的轨迹曲线。

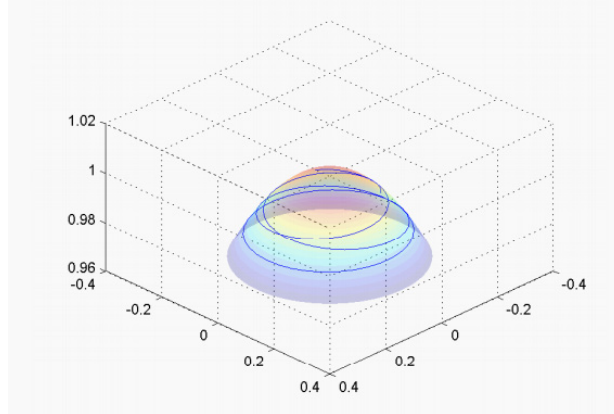


图 2 轨迹曲线

4 结语

本文得到两个主要结果: 定理 1 和定理 2。用来定义贝克隆变换的两个伪势 p, q 是由 Lax 对 (5) 确定的。作为应用, 我们构造了呼吸子解 (27), (28) 和孤子解 (29), 相应的轨迹曲线上存在一个趋向于北极的自交点序列。这些自交点的物理意义值得进一步研究。

参考文献

- [1] Landau L D, Lifshitz L M. On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies[J]. Physik. Zeits. Sowjetunion, 1935, 8: 153-169.
- [2] Gilbert T L. A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials[J]. IEEE Trans. Magn., 2004, 40:

3443-3449.

- [3] Lakshmanan M. The fascinating world of the Landau-Lifshitz-Gilbert equation: an overview[J]. Phil. Trans. R. Soc. A, 2011, 369: 1280-1300.
- [4] Lakshmanan M. Continuum spin system as an exactly solvable dynamical system[J]. Phys. Lett. A, 1977, 61: 53-54.
- [5] Takhtajan L A. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method[J]. Phys. Lett. A, 1977, 64: 235-238.
- [6] Lakshmanan M, Ruijgrok T W, Thompson C J. On the dynamics of continuum spin system[J]. Physica A, 1976, 84: 577-590.
- [7] Zakharov V E, Takhtajan L A. Equivalence of the nonlinear Schrödinger equation and the equation of a Heisenberg ferromagnet[J]. Theor. Math. Phys., 1979, 38: 17-20.
- [8] Rogers C, Schief W K. Bäcklund and Darboux Transformations[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [9] Wang J. Darboux transformation and soliton solutions for the Heisenberg hierarchy [J]. J. Phys. A, 2005, 38: 5217-5226.
- [10] Li Z, Geng X. Quasi-periodic solutions of the Heisenberg hierarchy[J]. Anal. Math. Phys., 2021, 11: 92.
- [11] Liu X K, Wen X Y, Zhang T. Magnetic soliton and breather interactions for the higher-order Heisenberg ferromagnetic equation via the iterative N-fold Darboux transformation[J]. Phys. Scr., 2024, 99: 045231.
- [12] Wahlquist H D, Estabrook F B. Prolongation structures of nonlinear evolution equations[J]. J. Math. Phys., 1975, 16: 1-7.

版权声明: ©2025 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS