

一致空间上动力系统拓扑链的极限跟踪性质

刘阁森, 熊海金*

广西民族大学相思湖学院 广西南宁

【摘要】本文聚焦紧致 Hausdorff 一致空间上拓扑动力系统的核心性质关联问题, 针对经典度量空间框架下动力系统跟踪性与混合性结论的局限性, 以一致空间为推广载体, 系统引入拓扑链、拓扑链混合、拓扑混合及极限跟踪等基础概念, 依托一致结构的对称性、复合性等核心性质, 结合周期伪轨构造方法完成严谨理论推导, 最终证明紧致 Hausdorff 一致空间中, 动力系统具备极限跟踪性质且拓扑链混合的充要条件为系统拓扑混合。该成果突破度量空间的约束, 将经典结论推广至更具一般性的一致空间范畴, 丰富了拓扑动力系统链式性质与跟踪性质的理论体系, 为非度量一致空间上动力系统的深入研究提供了关键理论支撑。

【关键词】一致空间; 拓扑链混合; 拓扑混合; 极限跟踪

【基金项目】广西民族大学相思湖学院 2024 年度校级科研项目: 大数据时代的大学生数据分析素养测评模型构建研究 (2024XJKY47)

【收稿日期】2026 年 3 月 14 日 **【出刊日期】**2026 年 4 月 18 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20260003

Limit shadowing of topological chains in dynamical systems on uniform spaces

Gesen Liu, Haijin Xiong*

Xiangsihu College, Guangxi Minzu University, Nanning, Guangxi

【Abstract】 This paper focuses on the relationship among core properties of topological dynamical systems on compact Hausdorff uniform spaces. To overcome the limitations of classical results on shadowing and mixing in metric spaces, we adopt uniform spaces as a generalized framework. We systematically introduce fundamental concepts such as topological chains, topological chain mixing, topological mixing, and limit shadowing. Leveraging the symmetry, composition, and other essential properties of uniform structures, combined with periodic pseudo-orbit construction methods, we carry out rigorous theoretical derivations. Ultimately, we prove that in a compact Hausdorff uniform space, a dynamical system possesses the limit shadowing property and is topologically chain mixing if and only if it is topologically mixing. This result breaks the constraints of metric spaces, extends classical conclusions to the more general setting of uniform spaces, enriches the theoretical system of chain properties and shadowing properties in topological dynamics, and provides key theoretical support for further research on dynamical systems on non-metric uniform spaces.

【Keywords】 Uniform spaces; Topological chain mixing; Topological mixing; Limit shadowing

1 引言

在经典拓扑动力系统的研究中, 空间通常被设定为紧致度量空间, 并以非负整数加法半群替代拓扑群, 从而构成半离散动力系统, 这是该领域的核心研究对象之一。拓扑链作为描述拓扑空间结构的重要工具, 通过由连续映射连接元素所构成的链式结构, 能够有效刻画空间的连通性、紧致性及 Hausdorff 性等基本属性, 并由此衍生出链传递性、链回复性、链混合性及链遍历性等一系列动力性质。近年来, 随着研究的深入, 一致空间因其较度量空间更具一般性, 成为推广经典动力系统理论的理想框架^[1-6]。本文在此框架下, 聚焦于

作者简介: 刘阁森 (1996-) 男, 硕士, 研究方向: 拓扑动力系统;

*通讯作者: 熊海金 (1999-) 男, 硕士, 研究方向: 数学教育。

紧致 Hausdorff 一致空间上的动力系统, 深入探讨极限跟踪性质与拓扑链混合性之间的内在联系。通过构造周期伪轨并利用一致结构的性质, 本文证明了系统具有极限跟踪性质且是拓扑链混合的当且仅当系统是拓扑混合的这一主要结论, 从而将度量空间中的相关结果推广至更广泛的一致空间, 为一类更一般空间中的动力系统研究提供了新的理论支撑。

2 基本概念

定义 1^[7] 设 X 是一个非空集合, $X \times X$ 是一个笛卡尔积。令 $A, A_1, A_2 \in X \times X$,

(1) $A^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in A\}$ 为 A 的逆, 若 $A^{-1} = A$, 则称 A 是对称的;

(2) A_1 和 A_2 的复合定义为

$$A_1 \circ A_2 = \{(x, y) \in X \times X | \exists z \in X, s.t. (x, z) \in A_1, (z, y) \in A_2\}.$$

(3) $\Delta(x) = \{(x, x) | \forall x \in X\}$ 称为对角线, 简记为 Δ 。

定义 2^[7] 设 X 是一个非空集合, $\mathcal{U}$ 是 $X \times X$ 的一个非空子集族。若 $\mathcal{U}$ 满足以下条件:

(1) 若 $E \in \mathcal{U}$, 则对角线 $\Delta \subset E$;

(2) 若 $E \in \mathcal{U}$, 则对角线 $E^{-1} \in \mathcal{U}$;

(3) 若 $E \in \mathcal{U}$, 则存在 $D \in \mathcal{U}$ 满足 $D \circ D \subset E$;

(4) 若 $D, E \in \mathcal{U}$, 则 $D \cap E \in \mathcal{U}$;

(5) 若 $E \in \mathcal{U}$ 且 $E \subset D, D \subset X \times X$, 则 $D \in \mathcal{U}$ 。

那么称 $\mathcal{U}$ 是 X 的一个一致结构, 偶对 $(X, \mathcal{U})$ 是一个一致空间。 $\mathcal{U}$ 的元素称作周围。一致空间

是 Hausdorff 当且仅当 $\mathcal{U}$ 是可分的, 即 $\bigcap \mathcal{U} = \Delta$ 。根据度量的定义, 不难看出上述各个条件的度量根源。

其中第一条是从条件 $d(x, x) = 0$ 导出, 而第二条则是从对称条件 $d(x, y) = d(y, x)$ 导出。第三条是三角不等式的一种退化形式。第四条和第五条类似于邻域系公理。

定义 3^[7] 设 $(X, \mathcal{U})$ 和 $(Y, \mathfrak{V})$ 是两个一致空间, 映射 $f: X \rightarrow Y$ 。称 f 是一致连续的, 如果对 $\mathfrak{V}$ 中的每个 V , 原像 $(f \times f)^{-1}(V)$ 是 $\mathcal{U}$ 的元, 即 $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ 。该定义还有另一种等价叙述。称 f 是 X 到 Y 的一致连续映射, 如果对 $\mathfrak{V}$ 中的每个 V , 存在 $U \in \mathcal{U}$, 使得对任意 $(x, y) \in U$, 有 $(f(x), f(y)) \in V$ 。

定义 4^[7] 设 $(X, \mathcal{U})$ 是一个一致空间, $f: X \rightarrow X$ 是一致连续映射。那么称 (X, f) 为定义在一致空间 $(X, \mathcal{U})$ 上的动力系统。

定义 5^[1] 设 (X, f) 是一致空间 $(X, \mathcal{U})$ 上的动力系统, 任意 $D, E \in \mathcal{U}$ 。 f 的一条长为 n 的 D 链是指存在序列 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 使得 $(f(x_i), x_{i+1}) \in D$, 其中 $0 \leq i \leq n-1$ 。假设 $x_0 = x, x_n = y$, 则称 D_{xy} 为 f 的一条从 x 到 y 的 D 链, 记 $|D_{xy}|$ 为链的长度。 f 的长度为无限的 D 链称作 D 伪轨。

定义 6 设 (X, f) 是一致空间 $(X, \mathcal{U})$ 上的动力系统。称 f 具有极限跟踪性质, 如果对任意 $E \in \mathcal{U}$, 存在 $D \in \mathcal{U}$, 使得对每个 D 伪轨 $\{x_i\}_{i=0}^\infty$, 存在 $z \in X$, 满足:

$$\exists N > 0, \forall n \geq N: (f^n(z), x_n) \in E.$$

定义 7^[1] 一个动力系统 (X, f) 或 f 被称为

(1) 拓扑链混合的。如果对任意 $x, y \in X$ 和任意 $D \in \mathcal{U}$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $n \geq N$, 存在从 x 到 y 长度为 n 的 D 链。

(2) 拓扑混合的。如果对任意非空开集 $U, V \subset X$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $n \geq N$, 有 $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ 。

引理 1^[8] 设 $\mathcal{U}$ 是一个一致结构, 对任意 $D \in \mathcal{U}$ 和任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $E \in \mathcal{U}$, 使得 $E^k \subset D$ 。

引理 2^[8] 设 $\mathcal{U}$ 是一个一致结构, 对任意 $D \in \mathcal{U}$, 存在对称的 $E \in \mathcal{U}$, 使得 $E \circ E \subset D$ 。

引理 3^[8] 设 $(X, \mathcal{U})$ 是一致空间, U 和 V 是 X 的非空开集, 对任意 $x \in U$ 和 $y \in V$, 存在 $E \in \mathcal{U}$, 使得 $E[x] \subset U$ 和 $E[y] \subset V$ 。

3 主要定理

定理 1 设 (X, f) 是紧致 Hausdorff 一致空间 $(X, \mathfrak{U})$ 上的动力系统, 则以下等价:

- (1) f 具有极限跟踪性质且是拓扑链混合的;
- (2) f 是拓扑混合的。

证明: $1 \Rightarrow 2$ 设 $U, V \subset X$ 为任意非空开集。由引理 3, 存在 $E_1 \in \mathfrak{U}$, 使得对任意 $x \in U$ 和 $y \in V$, 有 $E_1[x] \subset U$ 和 $E_1[y] \subset V$ 。由引理 2, 存在对称的 $E \in \mathfrak{U}$, 使得 $E \subset E \circ E \subset E_1$ 。综上, 可得

$$E[x] \subset E_1[x] \subset U; E[y] \subset E_1[y] \subset V. \quad (1)$$

由极限跟踪性质定义, 对上述的 E , 存在 $D \in \mathfrak{U}$, 使得对每个 D 伪轨 $\{x_i\}_{i=0}^\infty$, 存在跟踪点 $z \in X$ 和正整数 $N_0 \in \mathbb{N}$, 满足

$$\forall k \geq N_0: (f^k(z), x_k) \in E.$$

由 f 是拓扑链混合, 对上述 D , 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $n \geq N_1$, 存在一条从 x 到 y 的 D 链:

$$\{p_0 = x, p_1, \dots, p_n = y\}, (f(p_i), p_{i+1}) \in D, i = 0, \dots, n-1. \quad (2)$$

同时, 由拓扑链混合性, 也存在一条从 y 到 x 的 D 链:

$$\{q_0 = y, q_1, \dots, q_m = x\}, (f(q_i), q_{i+1}) \in D, i = 0, \dots, m-1. \quad (3)$$

将 (2) 与 (3) 连接, 得到一条从 x 到 x 的闭环 D 链 C_D , 长度为 $L = n + m$:

$$C_D: \{c_0 = x, c_1, \dots, c_n = y, c_{n+1}, \dots, c_L = x\} \quad (4)$$

且满足 $(f(c_k), c_{k+1}) \in D$ 对所有 $k = 0, \dots, L-1$ 成立。

将闭环 D 链 C_D 无限周期延拓, 定义序列 $\{x_k\}_{k=0}^\infty$:

$$x_k = c_k \bmod L, k = 0, 1, 2 \dots$$

则 $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ 为 D 伪轨且满足:

- (1) $x_0 = x, x_n = y$;
- (2) $x_{k+L} = x_k$ 对所有 k 成立;
- (3) $(f(x_k), x_{k+1}) \in D$ 对所有 k 成立。

对于这条 D 伪轨, 由极限跟踪性质存在 $z \in X$ 和 $N_0 \in \mathbb{N}$, 使得:

$$\forall k \geq N_0: (f^k(z), x_k) \in E. \quad (5)$$

由于伪轨的周期性 (周期 L), 对任意 $t \geq N_0$, 有 $x_{t+L} = x_t$ 。代入 (5) 得:

$$(f^t(z), x_t) \in E, (f^{t+L}(z), x_{t+L}) = (f^{t+L}(z), x_t) \in E. \quad (6)$$

由 E 的对称性, $(x_t, f^t(z)) \in E$ 。结合 (6) 得

$$(f^{t+L}(z), x_t) \circ (x_t, f^t(z)) = (f^{t+L}(z), f^t(z)) \in E \circ E \subset E_1.$$

在伪轨 $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ 中, 有 $x_0 = x, x_L = y$, 且 L 是固定的。

取 $t_1 \geq N_0$ 使得 $x_{t_1} = x$, 取 $t_2 = t_1 + L$, 则 $x_{t_2} = y$ 。由 (5) 得

$$(f^{t_1}(z), x) \in E, (f^{t_2}(z), y) \in E.$$

结合 E 的对称性和 (1), 得

$$f^{t_1}(z) \in E[x] \subset E_1[x] \subset U, f^{t_2}(z) \in E[y] \subset E_1[y] \subset V.$$

因此

$$f^L(f^{t_1}(z)) = f^{t_2}(z) \in V,$$

即

$$f^L(U) \cap V \neq \emptyset.$$

由于拓扑链混合性对任意大 n 均成立, 可将闭环 D 链的长度 L 替换为任意满足 $n \geq N_2$ 的整数, 重复周期延拓与极限跟踪推导, 即可得对任意 $n \geq N_2, f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ 。

由于 U, V 是非空开集, 故 f 是拓扑混合的。

$2 \Rightarrow 1$ (第一步) 任取 $x, y \in X, D \in \mathcal{U}$. 取对称的 D_0 使 $D_0 \circ D_0 \subset D$. 由 f 是一致连续, 存在 $W \in \mathcal{U}$ 使 $(u, v) \in W$ 有 $(f(u), f(v)) \in D_0$.

因 X 紧致, 存在有限覆盖 $\{W[p_1], \dots, W[p_k]\}$. 由拓扑混合, 对每对 i, j , 存在 N_{ij} 使 $n \geq N_{ij}$ 时

$$f^n(W[p_i]) \cap W[p_j] \neq \emptyset, \text{ 令 } N = \max N_{ij}.$$

对任意 $n \geq N + k$, 取 i_0, j_0 使 $x \in W[p_{i_0}], y \in W[p_{j_0}]$. 由拓扑混合, 存在 $a_0 = x, a_1, \dots, a_m$ 及 $n_t \geq 1 (\sum n_t = n)$ 使

$$f^{n_t}(a_t) \in W[p_{i_{t+1}}], a_t \in W[p_{i_t}].$$

将每段 $a_t, f(a_t), \dots, f^{n_t}(a_t)$ 连接, 相邻点满足 $(f(\cdot), \cdot) \in W \subset D_0$, 且段间连接点同在某 $W[p_j]$ 中, 故相邻点满足属于 D_0 , 再由 $D_0 \circ D_0 \subset D$ 得其为 D 链, 故 f 是拓扑链混合的.

(第二步) 任取 $E \in \mathcal{U}$. 取对称的 E_0 使 $E_0 \circ E_0 \subset E$. 由拓扑链混合, 存在 $D \in \mathcal{U}$ 使得对任意 $x, y \in X$ 存在从 x 到 y 的 D 链, 且可任意延长.

设 $\{x_i\}$ 为任意 D 伪轨. 由 X 紧致, 存在收敛子列 $\{x_{i_j}\}$, 设极限为 x^* . 对每个 N , 构造从 x_0 到 x^* 的 D 链, 再将其延伸为周期伪轨 $\{p_i^{(N)}\}$, 使得对充分大的 i 有 $(p_i^{(N)}, x_i) \in E_0$.

由 X 紧致, 存在子列使 $p_0^{(N_j)} \rightarrow z \in X$. 由一致连续性, 存在 N_0 使得当 $n \geq N_0$ 时,

$$(f^n(z), x_n) \in E_0 \circ E_0 \subset E.$$

故 f 具有极限跟踪性质.

4 总结

本文在紧致 Hausdorff 一致空间的框架下, 系统研究了拓扑链混合性与极限跟踪性质之间的关系. 通过引入一致结构中的周围概念, 定义并分析了拓扑链、拓扑链混合、拓扑混合及极限跟踪等动力性质. 主要定理表明: 在紧致 Hausdorff 一致空间中, 系统具有极限跟踪性质且是拓扑链混合的当且仅当系统是拓扑混合的. 该结论不仅推广了度量空间中的相关结果, 也为一类更广泛空间中的动力系统研究提供了新的理论基础. 未来工作可进一步探讨其他链式性质 (如链遍历性、链回复性) 与跟踪性质之间的关系, 或将其推广至非紧致或非 Hausdorff 的一致空间.

参考文献

- [1] Ahmadi S A, Wu X, Chen G. Topological chain and shadowing properties of dynamical systems on uniform spaces[J]. Topology and its Applications, 2020, 275: 107153.
- [2] Wu X, Ma X, Zhu Z, et al. Topological ergodic shadowing and chaos on uniform spaces[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2018, 28(03): 1850043.
- [3] Mangang K B, Akoijam S. On periodic shadowing, transitivity, chain mixing and expansivity in uniform dynamical systems[J]. Gulf Journal of Mathematics, 2020, 9(2): 31-39.
- [4] Salman M, Wu X, Das R. Sensitivity of Nonautonomous Dynamical Systems on Uniform Spaces[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2021, 31(01): 2150017.
- [5] Das P, Das T. Various types of shadowing and specification on uniform spaces[J]. Journal of Dynamical and Control Systems, 2018, 24: 253-267.
- [6] Wu X, Luo Y, Ma X, et al. Rigidity and sensitivity on uniform spaces[J]. Topology and its applications, 2019, 252: 145-157.
- [7] Kelley J. General topology[M]. 世界图书出版公司北京公司, 1992.
- [8] 刘阁森. 一致空间上动力系统拓扑链相关性质的研究[D]. 广西大学, 2023.

版权声明: ©2026 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有. 本文章按照知识共享署名许可条款发表.

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS