

一类具有泄漏时滞的 BAM 神经网络间的渐近接近

郭佳佳, 朱志强

广东技术师范大学数学与系统科学学院 广东广州

【摘要】 本文研究一类具有泄漏时滞的双向联想记忆 (BAM) 神经网络的渐近接近问题。首先, 通过适当的等价转换, 将神经网络系统转换为中立型时滞系统。然后, 利用合适的 Lyapunov 泛函和不等式方法, 得到了时变输入系统的任意解之间渐近接近、以及此系统的解渐近接近其相应的常输入系统平衡解的判别准则。本文所得结论在一定程度上推广了 Gopalsamy 在 *Journal of Mathematical analysis and Applications* [325(2007):1117-1132] 上的研究工作。

【关键词】 BAM 神经网络; 泄漏时滞; Lyapunov 泛函; 渐近接近

【基金项目】 国家自然科学基金 (基金号: 12071491)

Asymptotic Behaviors for a Class of BAM Neural Networks with Leakage Delays

Jiajia Guo, Zhiqiang Zhu

School of Mathematics and Systems Science, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou

【Abstract】 This paper is concerned with the asymptotic approximation of a class of bidirectional associative memory (BAM) neural networks with leakage delays. First, the systems are written as neutral delayed systems by a proper transformation. Then, by using appropriate Lyapunov functionals and an inequality method, a couple of criteria are obtained, which can guarantee the interior asymptotic behaviors of our BAM neural network with time-varying inputs, and the asymptotic behaviors between the BAM neural network and its corresponding one with constant inputs. The present results we obtained generalize to some extent the works published in the *Journal of Mathematical analysis and Applications* [(325) 2007: 1117--1132].

【Keywords】 BAM Neural Network; Leakage Delay; Lyapunov Function; Asymptotic Approximation

1 引言

不同的应用领域催生了各式各样的神经网络数学模型。比如, kosko 于 1987 年提出的双向联想记忆 (BAM) 神经网络模型^[1], 该网络被广泛应用于诸如图像信号处理、模式识别、自动控制、联想记忆、最优化问题等方面^[2-4]。因此, 几十年来, BAM 网络一直受到研究者的极大关注^[2-7]。另外, 当双向联想记忆神经网络被用于解决优化问题时, 人们期望该网络具有唯一的平衡点, 且平衡点是渐近稳定或指数稳定的。BAM 网络对稳定性的要求引起了众多研究者的极大兴趣, 并为此做出了大量的工作, 如[4-6]及它们相关的文献。

这里, 需要特别强调的是, 文[5]率先在 BAM 神经网络中引入了泄漏时滞^[8], 使传统的 BAM 网络模型具有更好的适应性。然而, 我们注意到, 文[5]

(还有上述提及的文献) 考虑的是关于具有常输入的 BAM 网络的稳定性, 这激发了我们的思考: 是否可以对具有时变输入的 BAM 网络进行类似的分析? 基于这个想法, 本文考虑一类具有泄漏时滞和时变输入的 BAM 神经网络和其相应的具有常输入 BAM 神经网络的渐近行为, 并借鉴文[5,7]的研究方法, 得到了时变输入系统的解之间渐近接近、以及时变输入系统的解渐近接近于相应的常输入系统平衡解的充分性判据。

本文下面的工作主要包括两部分: 第一, 引入适当的变换, 将所考虑的 BAM 网络写为等价的形式, 以方便后续的研究; 第二, 推广了文[5]的工作, 考虑了一类更广义的具有泄漏时滞的常输入 BAM 神经网络系统平衡点的存在性, 为保证相应的时变输入 BAM 网络系统渐近接近平衡点提供理论支撑。

2 预备知识

本文考虑如下具有泄漏时滞的常输入 BAM 神经网络

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = -a_i x_i(t - \tau_i^{(1)}) + \sum_{j=1}^m a_{ij} f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^m b_{ij} f_j(y_j(t - \sigma_j^{(2)})) + I_i, \\ \frac{dy_j(t)}{dt} = -b_j y_j(t - \tau_j^{(2)}) + \sum_{i=1}^n c_{ji} g_i(x_i(t)) + \sum_{i=1}^n d_{ji} g_i(x_i(t - \sigma_i^{(1)})) + J_j, \\ i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (0.1)$$

以及相应的时变输入神经网络

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = -a_i x_i(t - \tau_i^{(1)}) + \sum_{j=1}^m a_{ij} f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^m b_{ij} f_j(y_j(t - \sigma_j^{(2)})) + I_i(t), \\ \frac{dy_j(t)}{dt} = -b_j y_j(t - \tau_j^{(2)}) + \sum_{i=1}^n c_{ji} g_i(x_i(t)) + \sum_{i=1}^n d_{ji} g_i(x_i(t - \sigma_i^{(1)})) + J_j(t), \\ i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (0.2)$$

这里, $x_i(t)$, $y_j(t)$ 分别表示 t 时刻神经元的状态; a_i , b_j 表示神经元负载时间常数和被动衰变率; a_{ij} , c_{ji} 表示第 i 个神经元和第 j 个神经元之间的不滞后连接权值; b_{ij} , d_{ji} 表示第 i 个神经元和第 j 个神经元之间的滞后连接权值; $\tau_i^{(1)}$, $\tau_j^{(2)}$ 表示泄漏时滞; $\sigma_i^{(1)}$, $\sigma_j^{(2)}$ 表示时滞参数; f_j 和 g_i 表示神经元的激活函数; I_i 和 J_j 表示常输入, $I_i(t)$ 和 $J_j(t)$ 表示时变输入。

后续工作中, 我们总设定, 系统(0.1)和(0.2)的激活函数 f_j 、 g_i 满足下列条件: 存在正常数 k_j , $j = 1, 2, \dots, m$, 和 l_i , $i = 1, 2, \dots, n$, 使得

$$\begin{cases} |f_j(y_j) - f_j(\hat{y}_j)| \leq k_j |y_j - \hat{y}_j|, & y_j, \hat{y}_j \in R, \\ |g_i(x_i) - g_i(\hat{x}_i)| \leq l_i |x_i - \hat{x}_i|, & x_i, \hat{x}_i \in R. \end{cases} \quad (0.3)$$

定义 1^[5,9] 设 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$, $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m)^T$, 若 (\bar{x}, \bar{y}) 满足

$$\begin{cases} a_i \bar{x}_i = \sum_{j=1}^m (a_{ij} + b_{ij}) f_j(\bar{y}_j) + I_i, \\ b_j \bar{y}_j = \sum_{i=1}^n (c_{ji} + d_{ji}) g_i(\bar{x}_i) + J_j, \\ i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (0.4)$$

则称 (\bar{x}, \bar{y}) 为系统(0.1)的平衡解。

定义 2^[7] 若系统(0.2)的任意两组解 (x, y) 和 (u, v) 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) - (u(t), v(t)) = (0, 0),$$

则称系统 (0.2) 的解渐近接近; 设 (\bar{x}, \bar{y}) 为系统(0.1)的平衡解, 若系统(0.2)的任意解 (x, y) 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) - (\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0),$$

则称系统(0.2)渐近接近系统(0.1)的平衡解。

为了后续的叙述方便, 下面我们引入两个注解。

注解 1 设 (\bar{x}, \bar{y}) 为系统(0.1)的平衡解, 即 (\bar{x}, \bar{y}) 满足(0.4)。令

$$\bar{u}_i = a_i \bar{x}_i, \quad \bar{v}_j = b_j \bar{y}_j.$$

则(0.4)等价地写为

$$\begin{cases} \bar{u}_i = \sum_{j=1}^m (a_{ij} + b_{ij}) f_j \left(\frac{\bar{v}_j}{b_j} \right) + I_i, \\ \bar{v}_j = \sum_{i=1}^n (c_{ji} + d_{ji}) g_i \left(\frac{\bar{u}_i}{a_i} \right) + J_j, \\ i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

注解 2 设 (\bar{x}, \bar{y}) 为系统(0.1)的平衡解, (x, y) 和 (\tilde{x}, \tilde{y}) 是系统(0.2)的任意两组解。做变量替换 (参文 [2,5,9]), 设

$$u_i(t) = x_i(t) - \tilde{x}_i(t), v_j(t) = y_j(t) - \tilde{y}_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m, \quad (0.5)$$

$$r_i(t) = x_i(t) - \bar{x}_i, \quad w_j(t) = y_j(t) - \bar{y}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m, \quad (0.6)$$

则由系统(0.2)得

$$\begin{cases} \frac{du_i(t)}{dt} = -a_i u_i(t - \tau_i^{(1)}) + \sum_{j=1}^m a_{ij} F_j(v_j(t)) + \sum_{j=1}^m b_{ij} F_j(v_j(t - \sigma_j^{(2)})), \\ \frac{dv_j(t)}{dt} = -b_j v_j(t - \tau_j^{(2)}) + \sum_{i=1}^n c_{ji} G_i(u_i(t)) + \sum_{i=1}^n d_{ji} G_i(u_i(t - \sigma_i^{(1)})), \\ i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (0.7)$$

联合系统(0.1)--(0.2)又得

$$\begin{cases} \frac{dr_i(t)}{dt} = -a_i r_i(t - \tau_i^{(1)}) + \sum_{j=1}^m a_{ij} F_j(w_j(t)) + \sum_{j=1}^m b_{ij} F_j(w_j(t - \sigma_j^{(2)})) + (I_i(t) - I_i), \\ \frac{dw_j(t)}{dt} = -b_j w_j(t - \tau_j^{(2)}) + \sum_{i=1}^n c_{ji} G_i(r_i(t)) + \sum_{i=1}^n d_{ji} G_i(r_i(t - \sigma_i^{(1)})) + (J_j(t) - J_j), \\ i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (0.8)$$

以上

$$\begin{cases} F_j(v_j(t)) = f_j(v_j(t) + \tilde{y}_j(t)) - f_j(\tilde{y}_j(t)), \\ G_i(u_i(t)) = g_i(u_i(t) + \tilde{x}_i(t)) - g_i(\tilde{x}_i(t)), \\ F_j(w_j(t)) = f_j(w_j(t) + \bar{y}_j) - f_j(\bar{y}_j), \\ G_i(r_i(t)) = g_i(r_i(t) + \bar{x}_i) - g_i(\bar{x}_i), \\ i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (0.9)$$

另外, 系统(0.7)和(0.8)可分别改写为下列形式:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(u_i(t) - a_i \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t u_i(s) ds \right) = -a_i u_i(t) + \sum_{j=1}^m a_{ij} F_j(v_j(t)) + \sum_{j=1}^m b_{ij} F_j(v_j(t - \sigma_j^{(2)})), \\ \frac{d}{dt} \left(v_j(t) - b_j \int_{t-\tau_j^{(2)}}^t v_j(s) ds \right) = -b_j v_j(t) + \sum_{i=1}^n c_{ji} G_i(u_i(t)) + \sum_{i=1}^n d_{ji} G_i(u_i(t - \sigma_i^{(1)})), \\ i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (0.10)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(r_i(t) - a_i \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t r_i(s) ds \right) = -a_i r_i(t) + \sum_{j=1}^m a_{ij} F_j(w_j(t)) + \sum_{j=1}^m b_{ij} F_j(w_j(t - \sigma_j^{(2)})) + (I_i(t) - I_i), \\ \frac{d}{dt} \left(w_j(t) - b_j \int_{t-\tau_j^{(2)}}^t w_j(s) ds \right) = -b_j w_j(t) + \sum_{i=1}^n c_{ji} G_i(r_i(t)) + \sum_{i=1}^n d_{ji} G_i(r_i(t - \sigma_i^{(1)})) + (J_j(t) - J_j), \\ i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (0.11)$$

这样, 系统(0.2)的解渐近接近等价于 $\lim_{t \rightarrow \infty} (u_i(t), v_j(t)) = (0, 0)$; 系统 (0.2) 渐近接近系统(0.1)的平衡解等价于 $\lim_{t \rightarrow \infty} (r_i(t), w_j(t)) = (0, 0)$ 。

3 主要结论

定理 1 设系统(0.1)的参数满足

$$A := \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{k_j}{b_j} \sum_{i=1}^n |a_{ij} + b_{ij}|, \frac{l_i}{a_i} \sum_{j=1}^m |c_{ji} + d_{ji}| \right\} < 1, \quad (1.1)$$

则系统(0.1)存在唯一的平衡点。

证明 考虑实赋范线性空间 $R^n \times R^m$, 其上的范数规定为

$$\|(x, y)\| = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{j=1}^m |y_j|, (x, y) \in R^n \times R^m.$$

定义映射 $F: R^n \times R^m \rightarrow R^n \times R^m$,

$$F(x, y) = (F_1, F_2), F_1 = (F_{1i}(x, y)) \in R^n, F_2 = (F_{2j}(x, y)) \in R^m,$$

其中

$$\begin{cases} F_{1i}(x, y) = \sum_{j=1}^m (a_{1j} + b_{1j}) f_j \left(\frac{y_j}{b_j} \right) + I_i, \\ F_{2j}(x, y) = \sum_{i=1}^n (c_{1i} + d_{1i}) g_i \left(\frac{x_i}{a_i} \right) + J_j, \\ i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

对任意 $(x, y), (u, v) \in R^n \times R^m$, 利用条件(0.3), 我们有

$$\begin{aligned} & \|F(x, y) - F(u, v)\| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m (a_{ij} + b_{ij}) \left(f_j \left(\frac{y_j}{b_j} \right) - f_j \left(\frac{v_j}{b_j} \right) \right) \right| + \sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=1}^n (c_{ji} + d_{ji}) \left(g_i \left(\frac{x_i}{a_i} \right) - g_i \left(\frac{u_i}{a_i} \right) \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{k_j}{b_j} |a_{ij} + b_{ij}| |y_j - v_j| + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{a_i} |c_{ji} + d_{ji}| |x_i - u_i| \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{k_j}{b_j} \sum_{i=1}^n |a_{ij} + b_{ij}| \right) |y_j - v_j| + \sum_{i=1}^n \left(\frac{l_i}{a_i} \sum_{j=1}^m |c_{ji} + d_{ji}| \right) |x_i - u_i| \\ &\leq A \left(\sum_{i=1}^n |x_i - u_i| + \sum_{j=1}^m |y_j - v_j| \right) \\ &= A \|(x, y) - (u, v)\|. \end{aligned}$$

由于 $A < 1$, 由压缩映射原理, 存在唯一的 $(\bar{u}, \bar{v}) \in R^n \times R^m$, 使 $(\bar{u}, \bar{v}) = F(\bar{u}, \bar{v})$ 。由预备知识的注解 1 知, 系统(0.1)存在唯一的平衡点 (\bar{x}, \bar{y}) 。证毕。

定理 2 设系统(0.2)的参数满足

$$B := \min_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \{ p_i^{(1)}, q_j^{(1)} \} > 0, \quad (1.2)$$

其中

$$\begin{cases} p_i^{(1)} = 2a_i(1 - a_i\tau_i^{(1)}) - \sum_{j=1}^m \left[(|a_{ij}| + |b_{ij}|)k_j(1 + a_i\tau_i^{(1)}) + (|c_{ji}| + |d_{ji}|)l_i(1 + b_j\tau_j^{(2)}) \right], \\ q_j^{(1)} = 2b_j(1 - b_j\tau_j^{(2)}) - \sum_{i=1}^n \left[(|a_{ij}| + |b_{ij}|)k_j(1 + a_i\tau_i^{(1)}) + (|c_{ji}| + |d_{ji}|)l_i(1 + b_j\tau_j^{(2)}) \right], \\ i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

则系统(0.2)的解渐近接近。

证明 由预备知识的注解 2, 我们考虑系统(0.10)的解渐近接近 (0,0)。为此, 构造如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t), \quad V_1(t) = \sum_{i=1}^n \left(u_i(t) - a_i \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t u_i(s) ds \right)^2,$$

$$\begin{aligned} V_2(t) = & \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m |b_{ij}| k_j \int_{t-\sigma_j^{(2)}}^t v_j^2(s) ds + a_i^2 \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t \int_s^t u_i^2(x) dx ds \right. \\ & + \sum_{j=1}^m |a_{ij}| a_i k_j \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t \int_s^t u_i^2(x) dx ds + \sum_{j=1}^m |b_{ij}| a_i k_j \tau_i^{(1)} \int_{t-\sigma_j^{(2)}}^t v_j^2(s) ds \\ & \left. + \sum_{j=1}^m |b_{ij}| a_i k_j \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t \int_s^t u_i^2(x) dx ds \right), \end{aligned}$$

$$V_3(t) = \sum_{j=1}^m \left(v_j(t) - b_j \int_{t-\tau_j^{(2)}}^t v_j(s) ds \right)^2,$$

$$\begin{aligned} V_4(t) = & \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n |c_{ji}| l_i \int_{t-\sigma_i^{(1)}}^t u_i^2(s) ds + b_j^2 \int_{t-\tau_j^{(2)}}^t \int_s^t v_j^2(x) dx ds \right. \\ & + \sum_{i=1}^n |c_{ji}| b_j l_i \int_{t-\tau_j^{(2)}}^t \int_s^t v_j^2(x) dx ds + \sum_{i=1}^n |d_{ji}| b_j l_i \tau_j^{(2)} \int_{t-\sigma_i^{(1)}}^t u_i^2(s) ds \\ & \left. + \sum_{i=1}^n |d_{ji}| b_j l_i \int_{t-\tau_j^{(2)}}^t \int_s^t v_j^2(x) dx ds \right). \end{aligned}$$

$V_1(t)$ 沿着系统(0.10)求导, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^n 2 \left(u_i(t) - a_i \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t u_i(s) ds \right) \left(-a_i u_i(t) + \sum_{j=1}^m a_{ij} F_j(v_j(t)) + \sum_{j=1}^m b_{ij} F_j(v_j(t - \sigma_j^{(2)})) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-2a_i u_i^2(t) + 2u_i(t) \sum_{j=1}^m a_{ij} F_j(v_j(t)) + 2u_i(t) \sum_{j=1}^m b_{ij} F_j(v_j(t - \sigma_j^{(2)})) \right. \\ &\quad + 2a_i^2 u_i(t) \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t u_i(s) ds - 2a_i \sum_{j=1}^m a_{ij} F_j(v_j(t)) \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t u_i(s) ds \\ &\quad \left. - 2a_i \sum_{j=1}^m b_{ij} F_j(v_j(t - \sigma_j^{(2)})) \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t u_i(s) ds \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(-2a_i u_i^2(t) + 2|u_i(t)| \sum_{j=1}^m |a_{ij}| |F_j(v_j(t))| + 2|u_i(t)| \sum_{j=1}^m |b_{ij}| |F_j(v_j(t - \sigma_j^{(2)}))| \right. \\ &\quad + 2a_i^2 |u_i(t)| \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t |u_i(s)| ds + 2a_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}| |F_j(v_j(t))| \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t |u_i(s)| ds \\ &\quad \left. + 2a_i \sum_{j=1}^m |b_{ij}| |F_j(v_j(t - \sigma_j^{(2)}))| \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t |u_i(s)| ds \right). \end{aligned}$$

利用(0.9)和(0.3)以及 $2ab \leq a^2 + b^2$, 得

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1(t)}{dt} &\leq \sum_{i=1}^n \left(-2a_i u_i^2(t) + \sum_{j=1}^m |a_{ij}| k_j 2 |u_i(t)| |v_j(t)| + \sum_{j=1}^m |b_{ij}| k_j 2 |u_i(t)| |v_j(t - \sigma_j^{(2)})| \right. \\
&\quad + a_i^2 \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t 2 |u_i(t)| |u_i(s)| ds + \sum_{j=1}^m |a_{ij}| k_j a_i \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t 2 |v_j(t)| |u_i(s)| ds \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^m |b_{ij}| k_j a_i \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t 2 |v_j(t - \sigma_j^{(2)})| |u_i(s)| ds \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left[-2a_i u_i^2(t) + \sum_{j=1}^m |a_{ij}| k_j (u_i^2(t) + v_j^2(t)) + \sum_{j=1}^m |b_{ij}| k_j (u_i^2(t) + v_j^2(t - \sigma_j^{(2)})) \right. \\
&\quad + a_i^2 \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t (u_i^2(t) + u_i^2(s)) ds + \sum_{j=1}^m |a_{ij}| k_j a_i \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t (u_i^2(s) + v_j^2(t)) ds \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^m |b_{ij}| k_j a_i \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t (u_i^2(s) + v_j^2(t - \sigma_j^{(2)})) ds \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[-2a_i u_i^2(t) + \sum_{j=1}^m |a_{ij}| k_j (u_i^2(t) + v_j^2(t)) + \sum_{j=1}^m |b_{ij}| k_j (u_i^2(t) + v_j^2(t - \sigma_j^{(2)})) \right. \\
&\quad + a_i^2 \left(\tau_i^{(1)} u_i^2(t) + \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t u_i^2(s) ds \right) + \sum_{j=1}^m |a_{ij}| k_j a_i \left(\tau_i^{(1)} v_j^2(t) + \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t u_i^2(s) ds \right) \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^m |b_{ij}| k_j a_i \left(\tau_i^{(1)} v_j^2(t - \sigma_j^{(2)}) + \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t u_i^2(s) ds \right) \right].
\end{aligned}$$

类似地, $V_2(t)$ 沿着系统(0.10)求导, 可得

$$\begin{aligned}
\frac{dV_2(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m |b_{ij}| k_j (v_j^2(t) - v_j^2(t - \sigma_j^{(2)})) + a_i^2 \left(-\int_{t-\tau_i^{(1)}}^t u_i^2(x) dx + \tau_i^{(1)} u_i^2(t) \right) \right. \\
&\quad + \sum_{j=1}^m |a_{ij}| a_i k_j \left(-\int_{t-\tau_i^{(1)}}^t u_i^2(x) dx + \tau_i^{(1)} u_i^2(t) \right) + \sum_{j=1}^m |b_{ij}| a_i k_j \tau_i^{(1)} (v_j^2(t) - v_j^2(t - \sigma_j^{(2)})) \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^m |b_{ij}| a_i k_j \left(-\int_{t-\tau_i^{(1)}}^t u_i^2(x) dx + \tau_i^{(1)} u_i^2(t) \right) \right).
\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
\frac{dV_3(t)}{dt} &\leq \sum_{j=1}^m \left[-2b_j v_j^2(t) + \sum_{i=1}^n |c_{ji}| l_i (v_j^2(t) + u_i^2(t)) + \sum_{i=1}^n |d_{ji}| l_i (v_j^2(t) + u_i^2(t - \sigma_i^{(1)})) \right. \\
&\quad + b_j^2 \left(\tau_j^{(2)} v_j^2(t) + \int_{t-\tau_j^{(2)}}^t v_j^2(s) ds \right) + \sum_{i=1}^n |c_{ji}| l_i b_j \left(\tau_j^{(2)} u_i^2(t) + \int_{t-\tau_j^{(2)}}^t v_j^2(s) ds \right) \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n |d_{ji}| l_i b_j \left(\tau_j^{(2)} u_i^2(t - \sigma_i^{(1)}) + \int_{t-\tau_j^{(2)}}^t v_j^2(s) ds \right) \right], \\
\frac{dV_4(t)}{dt} &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n |d_{ji}| l_i (u_i^2(t) - u_i^2(t - \sigma_i^{(1)})) + b_j^2 \left(-\int_{t-\tau_j^{(2)}}^t v_j^2(x) dx + \tau_j^{(2)} v_j^2(t) \right) \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^n |c_{ji}| b_j l_i \left(-\int_{t-\tau_j^{(2)}}^t v_j^2(x) dx + \tau_j^{(2)} v_j^2(t) \right) + \sum_{i=1}^n |d_{ji}| b_j l_i \tau_j^{(2)} (u_i^2(t) - u_i^2(t - \sigma_i^{(1)})) \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n |d_{ji}| b_j l_i \left(-\int_{t-\tau_j^{(2)}}^t v_j^2(x) dx + \tau_j^{(2)} v_j^2(t) \right) \right).
\end{aligned}$$

综合上面结果, 并调用 (1.2), 推出

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &\leq -\sum_{i=1}^n \left(2a_i(1-a_i\tau_i^{(1)}) - \sum_{j=1}^m \left[(|a_{ij}|+|b_{ij}|)k_j(1+a_i\tau_i^{(1)}) + (|c_{ji}|+|d_{ji}|)l_i(1+b_j\tau_j^{(2)}) \right] \right) u_i^2(t) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \left(2b_j(1-b_j\tau_j^{(2)}) - \sum_{i=1}^n \left[(|a_{ij}|+|b_{ij}|)k_j(1+a_i\tau_i^{(1)}) + (|c_{ji}|+|d_{ji}|)l_i(1+b_j\tau_j^{(2)}) \right] \right) v_j^2(t) \\ &= -\left(\sum_{i=1}^n p_i^{(1)} u_i^2(t) + \sum_{j=1}^m q_j^{(1)} v_j^2(t) \right) \leq -B \left(\sum_{i=1}^n u_i^2(t) + \sum_{j=1}^m v_j^2(t) \right). \end{aligned}$$

对上式两边从 0 到 t 积分可得

$$V(t) + B \int_0^t \left[\sum_{i=1}^n u_i^2(s) + \sum_{j=1}^m v_j^2(s) \right] ds \leq V(0).$$

上式得知 $V(t)$ 有界, 并且

$$\int_0^\infty [u_i^2(s) + v_j^2(s)] ds < \infty. \quad (1.3)$$

由式(1.3), 可知 $u_i(t)$ 和 $v_j(t)$ 在 $[0, \infty)$ 有界, 又由式(0.7)可知它们的导数在 $[0, \infty)$ 有界, 所以 $u_i(t)$ 和 $v_j(t)$ 一致连续. 由无穷积分的收敛性质推知 $\lim_{t \rightarrow \infty} u_i(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} v_j(t) = 0$. 所以, 系统(0.2)的解渐近接近. 证毕.

由定理 2 很容易导出下面结论:

推论 1 若系统(0.1)的参数满足条件(1.1)和(1.2), 则系统(0.1)的任意解渐近接近其平衡解.

定理 3 设系统(0.2)的参数满足条件(1.1)和

$$C := \min_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \{p_i^{(2)}, q_j^{(2)}\} > 0, \quad (1.4)$$

其中,

$$\begin{cases} p_i^{(2)} = 2a_i(1-a_i\tau_i^{(1)}) - \sum_{j=1}^m \left[(|a_{ij}|+|b_{ij}|)k_j(1+a_i\tau_i^{(1)}) + (|c_{ji}|+|d_{ji}|)l_i(1+b_j\tau_j^{(2)}) \right] - (1+a_i\tau_i^{(1)}), \\ q_j^{(2)} = 2b_j(1-b_j\tau_j^{(2)}) - \sum_{i=1}^n \left[(|a_{ij}|+|b_{ij}|)k_j(1+a_i\tau_i^{(1)}) + (|c_{ji}|+|d_{ji}|)l_i(1+b_j\tau_j^{(2)}) \right] - (1+b_j\tau_j^{(2)}), \\ i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

并且有

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n (1+a_i\tau_i^{(1)})(I_i(s)-I_i)^2 + \sum_{j=1}^m (1+b_j\tau_j^{(2)})(J_j(s)-J_j)^2 ds < \infty. \quad (1.5)$$

则系统(0.2)的解渐近接近系统(0.1)的平衡解.

证明 由预备知识的注解 2, 我们考虑系统(0.11)的解渐近接近 $(0,0)$. 为此, 构造如下 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V(t) &= V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t), \quad V_1(t) = \sum_{i=1}^n \left(r_i(t) - a_i \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t r_i(s) ds \right)^2, \\ V_2(t) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m |b_{ij}| k_j \int_{t-\sigma_j^{(2)}}^t w_j^2(s) ds + a_i^2 \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t \int_s^t r_i^2(u) du ds \right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^m |a_{ij}| a_i k_j \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t \int_s^t r_i^2(u) du ds + \sum_{j=1}^m |b_{ij}| a_i k_j \tau_i^{(1)} \int_{t-\sigma_j^{(2)}}^t w_j^2(s) ds \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^m |b_{ij}| a_i k_j \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t \int_s^t r_i^2(u) du ds + a_i \int_{t-\tau_i^{(1)}}^t \int_s^t r_i^2(u) du ds \right), \end{aligned}$$

$$V_3(t) = \sum_{j=1}^m \left(w_j(t) - b_j \int_{t-\tau_j^{(2)}}^t w_j(s) ds \right)^2,$$

$$V_4(t) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n |c_{ji}| l_i \int_{t-\sigma_i^{(1)}}^t r_i^2(s) ds + b_j^2 \int_{t-\tau_j^{(2)}}^t \int_s^t w_j^2(u) du ds + \sum_{i=1}^n |c_{ji}| b_j l_i \int_{t-\tau_j^{(2)}}^t \int_s^t w_j^2(u) du ds \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n |d_{ji}| b_j l_i \tau_j^{(2)} \int_{t-\sigma_i^{(1)}}^t r_i^2(s) ds + \sum_{i=1}^n |d_{ji}| b_j l_i \int_{t-\tau_j^{(2)}}^t \int_s^t w_j^2(u) du ds + b_j \int_{t-\tau_j^{(2)}}^t \int_s^t w_j^2(u) du ds \right).$$

类似定理 2 的证明, $V(t)$ 沿着系统(0.11)求导, 可得

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -C \left[\sum_{i=1}^n r_i^2(t) + \sum_{j=1}^m w_j^2(t) \right] + \sum_{i=1}^n (1 + a_i \tau_i^{(1)}) (I_i(t) - I_i)^2 + \sum_{j=1}^m (1 + b_j \tau_j^{(2)}) (J_j(t) - J_j)^2.$$

上式两边从 0 到 t 积分得

$$V(t) + C \int_0^t \left[\sum_{i=1}^n r_i^2(s) + \sum_{j=1}^m w_j^2(s) \right] ds \leq V(0) + \int_0^t \left[\sum_{i=1}^n (1 + a_i \tau_i^{(1)}) (I_i(s) - I_i)^2 + \sum_{j=1}^m (1 + b_j \tau_j^{(2)}) (J_j(s) - J_j)^2 \right] ds.$$

由条件(1.5)可得 $\int_0^\infty [r_i^2(s) + w_j^2(s)] ds < \infty$ 。余下的证明与定理 2 相同, 最后可得

$\lim_{t \rightarrow \infty} r_i(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} w_j(t) = 0$ 。所以系统(0.2)的解渐近接近系统(0.1)的平衡解。证毕。

由定理 3 易得:

推论 2 若系统(0.2)的参数满足条件(1.1)、(1.4)和(1.5), 则系统(0.2)的解有界。

4 例题

假设系统(0.1)和(0.2)的参数满足,

$$a_1=5, a_2=10, b_1=5, b_2=8, \tau_1^{(1)}=\tau_1^{(2)}=0.01, \tau_2^{(1)}=\tau_2^{(2)}=0.02, \sigma_1^{(1)}=\sigma_1^{(2)}=1, \sigma_2^{(1)}=\sigma_2^{(2)}=2,$$

$$(a_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0.3 & -2 \end{bmatrix}, (b_{ij}) = \begin{bmatrix} -1 & 0.25 \\ 0.3 & 2 \end{bmatrix}, (c_{ji}) = \begin{bmatrix} 0.2 & 2 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}, (d_{ji}) = \begin{bmatrix} 0.2 & -2 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}.$$

取激活函数 $f_j(y_j) = \tanh y_j, g_i(x_i) = \tanh x_i, i, j = 1, 2$, 外部输入

$$I_1=1, I_2=-4, J_1=6, J_2=-10; I_1(t)=1+e^{-t}, I_2(t)=-4+e^{-t}, J_1(t)=6+e^{-2t}, J_2(t)=-10+e^{-2t}.$$

易知 $l_i = k_j = 1, i, j = 1, 2$ 。通过验证, 所设参数满足定理 3, 所以系统(0.2)的解渐近接近系统(0.1)的平衡解, 其状态如图 1 所示。应用 Matlab 计算得系统(0.1)的平衡点 $\bar{x} = (0.1153, -0.3498)^T$, $\bar{y} = (1.2092, -1.2443)^T$ 。

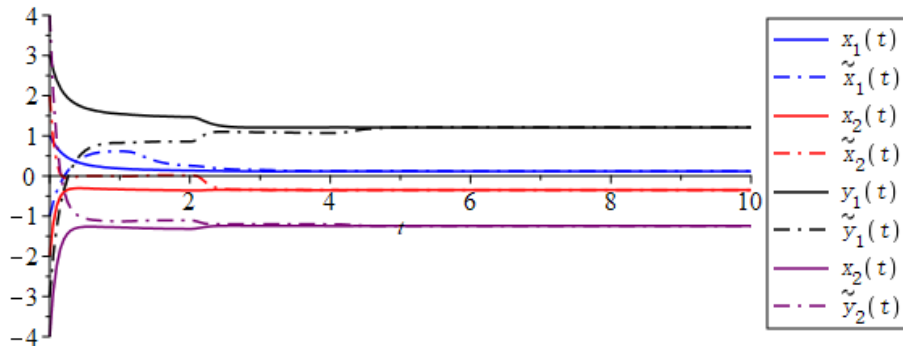


图 1 系统(0.2)的解渐近接近系统(0.1)的平衡解

5 结论

在对各类神经网络进行研究时,大家有一个共同关心的话题,那就是系统的稳定性.这是因为,在神经网络的实践中,系统的稳定性涉及到诸如记忆(存储)是否正确恢复,模式识别是否因为输入的小扰动引起输出的大偏差,等等^[7,10].本文受文[5,7]的启发,考虑了更一般的 BAM 神经网络的渐近性态,并得到几个充分性判据。

我们注意到,本文的判别准则严重依赖于系统的泄漏滞后量.这带给我们另一个思考:是否可以通过别的方法重新构建系统的渐近准则,使得新的判别方法减轻对泄漏滞后量的依赖?这将是我们今后的努力方向。

参考文献

- [1] Kosko B. Adaptive bidirectional associative memories[J]. Applied optics, 1987, 26(23): 4947-4960.
- [2] Chaouki Aouiti, El Abed Assali. Stability Analysis for a Class of Impulsive Bidirectional Associative Memory (BAM) Neural Networks with Distributed Delays and Leakage Time-Varying Delays[J]. Neural Processing Letters, 2019, 50(1): 851-885.
- [3] 王晓梅. 神经网络导论[M]. 北京:科学出版社, 2017.
- [4] Ali M S, Saravanan S, Rani M E, et al. Asymptotic stability of Cohen-Grossberg BAM neutral type neural networks with distributed time varying delays[J]. Neural Processing Letters, 2017, 46(3): 991-1007.
- [5] Gopalsamy K. Leakage delays in BAM[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 325(2): 1117-1132.
- [6] ZHANG Hai, YE Renyu, CAO Jinde, Ahmed Alsaedi, Amr Elsonbaty. Existence and Globally Asymptotic Stability of Equilibrium Solution for Fractional-Order Hybrid BAM Neural Networks with Distributed Delays and Impulses[J]. Complexity 2017, Art ID 6875874,13.
- [7] Rao V S H, Rao P R S. Time Varying Stimulations in Simple Neural Networks and Convergence to Desired Outputs[J]. Differential Equations and Dynamical Systems, 2018, 26(1-3): 81-104.
- [8] 闫欢, 赵振江, 宋乾坤. 具有泄漏时滞的复值神经网络的全局同步性[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(08): 832-841.
- [9] LI Li, YANG Yongqing, LIN Guang. The stabilization of BAM neural networks with time-varying delays in the leakage terms via sampled-data control[J]. Neural Computing Applications, 2015, 27(2): 447-457.
- [10] Maisnam S, Singh R K B. Generalized stability conditions for coupled neural networks with delay feedbacks[J]. Heliyon, 2019, 5(5): e01643.

收稿日期: 2020年12月29日

出刊日期: 2021年2月3日

引用本文: 郭佳佳, 朱志强, 一类具有泄漏时滞的 BAM 神经网络间的渐近接近[J]. 国际应用数学进展, 2021, 3(1): 5-13.

DOI: 10.12208/j.aam.20210002

检索信息: RCCSE 权威核心学术期刊数据库、中国知网 (CNKI Scholar)、万方数据 (WANFANG DATA)、Google Scholar 等数据库收录期刊

版权声明: ©2021 作者与开放获取期刊研究中心 (OAJRC) 所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS