2025 年第 7 卷第 3 期
https://aam.oajrc.org/

高中数学填空、选择题中“构造函数”法的应用

成雨沁

扬州大学数学学院　江苏扬州

【摘要】在高中数学填空题和选择题中，问题的解决往往不仅只依靠公式和定理的掌握与应用，更需要通过灵活变通的思想方法，如函数与方程思想、划归与转化思想等，将复杂的题目条件化繁为简，用一种全新的、更为直接的视角去厘清问题的本质。“构造函数”法在一些特殊的试题当中，可以引导学生通过观察题目条件的特点，或对条件进行适当的变形后，构造出新的函数关系，找到解决问题新的突破口，从而提高学生的数学解题能力与速度。

【关键词】函数；高考；解题策略；构造函数

【收稿日期】2025 年 8 月 5 日　**【出刊日期】**2025 年 9 月 10 日　**【DOI】**10.12208/j.aam.20250022

Application of the “Constructor Function” method in high school mathematics fill-in-the-blank and multiple-choice questions

Yuqin Cheng

School of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】Fill-in-the-blank and multiple-choice questions in high school mathematics often require more than just mastering and applying formulas and theorems to be solved. They demand flexible thinking approaches—such as the functional and equation approach, or the reduction and transformation approach—to simplify complex conditions and clarify the problem's essence through a fresh, more direct perspective. The “Constructing Functions” approach can guide students in certain specialized problems. By observing the characteristics of the given conditions or appropriately transforming them, students can construct new functional relationships. This process helps identify novel breakthroughs for solving problems, thereby enhancing both mathematical problem-solving skills and efficiency.

【Keywords】Functions; College entrance examination; Problem-solving strategies; Constructor

1 全国高考试题解三角形试题类型以及特点

构造函数是高中数学，尤其是在导数、不等式、数列等章节中解决问题的重要策略之一[1]。这种方法的核心在于将一个看似复杂的代数或不等式问题，通过巧妙的转化，将其转化为研究一个我们已经熟悉的新函数的问题。从近几年的高考和模拟试题来看，构造函数类题目的命题形式日益灵活多变，考查重点也越来越注重思维导向，而不是简单的知识点堆砌。此类题目不仅关注学生对函数性质（如单调性、奇偶性）、导数工具等基本知识点的掌握情况，更强调在非标准情境中对抽象概括和模型构建能力的迁移与运用[2]。

这一命题趋势与《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》中提出的“发展数学抽象、逻辑推理、数学建模”等核心素养的课程理念高度契合。课标强调培养学生的数学思维与问题解决能力，要求能在复杂情境中灵活运用数学思想解决问题。具体而言，构造函数是“数学抽象”和“逻辑推理”的完美结合：学生需要将具体问题抽象为一个函数模型，再利用微积分的逻辑工具对该模型进行分析求解[3]。

而构造函数作为融合数形结合、转化与化归等思想的代数工具，是体现课程标准“思维训练、创新能力”理念的重要载体。它体现了“化归思想”的精髓，即将陌生的、难以直接处理的问题，转化为我们能够利用

现有知识（如导数法）处理的“标准”函数分析问题[4]。

学生在应用“构造函数”法时，常见的困难与思维误区主要体现在以下几个方面。大多数题目无法直接观察到构造函数的原型，需要对原式进行等价变形才能看出潜在的函数结构。学生往往缺乏这种“形到函数”的抽象概括能力和代数变形技巧。在变形过程中，学生容易忽略原问题或新函数所规定的定义域。还有学生可能过于依赖导数工具，未能结合函数的奇偶性、周期性、特殊点等性质 简化运算，导致计算量大、效率低下。

2 真题解析

2.1 过构造函数解决数值比较大小问题

以指、对、幂形式的数值比较题为例，如果题目中给出的条件形式较为统一，则可以直接根据给出的形式直接构造函数，再通过函数的性质，给出大小关系。如果给出的题目条件当中给出的指、对、幂的类型在两个及以上，则可能需要对条件进行适当的变形之后，再通过构造函数的方法解决问题[5]。

例 1.（2023 全国甲文，12）已知$9^m=10$，$a=10^m-11$，$b=8^m-9$，则（　）

A.$a>0>b$　　B.$a>b>0$　　C.$b>a>0$　　D.$b>0>a$

分析：通过观察试题中所给出的条件，针对 a，b 两个式子可以发现它们具有相似的形式，进而可以进一步抽象同一个函数的形式。

解析：因为$9^m=10$，所以$m=\log_9 10$.

因为$\log_9 9<\log_9 10<\log_9\sqrt{729}=\dfrac{3}{2}$，所以$m>1$

，$a=10^m-11=10^m-10-1$，$b=8^m-9=8^m-8-1$，

构造函数$f(x)=x^m-x-1(x>1)$，所以$f'(x)=mx^{m-1}-1$，

因为$1<m<\dfrac{3}{2}$，（$x>1$），所以$f'(x)=mx^{m-1}-1>0$，

所以$f(x)=x^m-x-1$在$(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以$f(10)>f(8)$，又$f(9)=9^{\log_9 10}-9-1=0$，故$a>0>b$，故选 A.

例 2.（2021 全国乙理，12）设$a=2\ln 1.01$，$b=\ln 1.02$，$c=\sqrt{1.04}-1$，则（　）

A.$a<b<c$　　B.$b<c<a$　　C.$b<a<c$　　D.$c<a<b$

分析：首先可以通过对数函数的单调性较为容易地得到 a 与 b 之间的大小关系，接着可以通过构造函数法与作差法相结合得到 a 与 c 之间的大小关系。

解析：因为$a=2\ln 1.01=\ln 1.01^2=\ln 1.0201$，

所以$a>b$，排除 A、D 两个选项.

下面比较a与c的大小.

令$f(x)=2\ln(1+x)-\sqrt{1+4x}+1$，$x\in[0,1)$，

则$f'(x)=\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{2}{\sqrt{1+4x}}=\dfrac{2\left[\sqrt{1+4x}-(1+x)\right]}{(1+x)\cdot\sqrt{1+4x}}$，

因为$(1+4x)-(1+x)^2=1+4x-1-2x-x^2=2x-x^2=x(2-x)\ge 0$，（$x\in[0,1)$），

所以$f'(x)\ge 0$，所以$f(x)$在$[0,1)$上为增函数，

所以$f(0.01)>f(0)=0$，得$a>c$.

排除 C，故选 B.

例 3.（2024 河北石家庄部分学校期末，4）设 $a=\ln 2$，$b=\dfrac{\ln 3}{\sqrt{3}}$，$c=\dfrac{2}{e}$，则 a，b，c 的大小关系为（）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

分析：不同于例 1 和例 2，例 3 的题目中无法直接观察到 3 个式子的相同形式，也无法先判断其中两个式子的大小关系再通过作差法解决问题，但通过观察可以看出 a，b，c 中 a，b 两项都具有对数，而 b，c 两项则是都具有分式的形式，此时就需要结合这两个两项之间的共同特征，先从最后的形式出发对三个式子进行适当的变形，得到相同的形式后，以此为基础构造函数。

解析：设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x>0$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<e$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,e)$ 上单调递增.

因为 $\sqrt{3}<2<e$，所以 $f(\sqrt{3})<f(2)<f(e)$，

即 $\dfrac{\ln\sqrt{3}}{\sqrt{3}}<\dfrac{\ln 2}{2}<\dfrac{1}{e}$，$\dfrac{\ln 3}{2\sqrt{3}}<\dfrac{\ln 2}{2}<\dfrac{1}{e}$

不等式两边同时乘 2 得 $\dfrac{\ln 3}{\sqrt{3}}<\ln 2<\dfrac{2}{e}$，

及 $b<a<c$，故选 B.

2.2 通过构造函数解决取值问题

在高考试题的选择题与填空题中，求取值范围是一类常见的问题，学生遇到这类问题时，往往能够想到通过参变分离等方法来构造函数，但是在构造函数之后，现在的考题对还要求学生结合构造函数的性质以及图象等内容进行解题，所以学生需要在构造函数的基础之上，进一步观察函数的特征，选择恰当的方法与构造函数法相结合，降低题目的难度，把握问题的本质[6]。

例 4.（2024 新课标Ⅰ，6）设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$.当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点，则 $a=$（　）

A.-1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C.1　　D.2

分析：这道选择题可以将交点问题转化为两个函数相等的问题，便能联想到通过参变分离构造函数从而得到 a 的取值范围，但是本题值得注意的是，很多学生会在构造函数之后直接求函数的取值范围，没有关注到构造的函数本身为偶函数，利用偶函数的性质来减少计算的难度。

解析：令 $f(x)=g(x)$，

则 $a(x+1)^2-1=\cos x+2ax$，即 $a=\dfrac{1+\cos x}{1+x^2}$.

显然 $y=\dfrac{1+\cos x}{1+x^2}$ 为偶函数，由偶函数图象关于 y 轴对称知，

若曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 恰有一个交点，

则曲线 $y=\dfrac{1+\cos x}{1+x^2}$ 与直线 $y=a$ 恰有一个交点

故此交点必在 y 轴上，即 $x=0$，

此时 $a=\dfrac{1+\cos 0}{1+0^2}=2$，故选 D.

例 5.（2022 全国乙理，16）已知$x=x_1$和$x=x_2$分别是函数$f(x)=2a^x-ex^2$（$a>0$且$a\neq 1$）的极小值点和极大值点.若$x_1<x_2$，则 a 的取值范围是______.

分析：题目的两个极值点的条件，需要首先对函数进行求导后，转化为导函数具有两个不相等的实根，但是此时的导函数无法进行参变分离来构造函数，而是应该将导函数转化构造为两个函数，通过分类讨论研究这两个函数的交点情况从而得到答案。

解析：因为$f(x)=2a^x-ex^2$，所以$f'(x)=2a^x\ln a-2ex$，

根据题意得x_1，x_2是$f'(x)=0$的两个不相等的实数根.

由$f'(x)=0$得，$a^x\ln a=ex$.

由题意得函数$y=a^x\ln a$ 与$y=ex$的图象有两个不同的交点.

①$a>1$时，当$x\in(-\infty,x_1)$时，$f'(x)=2a^x\ln a-2ex>0$，

$f(x)$在$(-\infty,x_1)$上单调递增；

当$x\in(x_1,x_2)$时，$f'(x)=2a^x\ln a-2ex<0$，

$f(x)$在$(-\infty,x_1)$上单调递减；

当$x\in(x_2,+\infty)$时，$f'(x)=2a^x\ln a-2ex<0$，

$f(x)$在$(-\infty,x_1)$上单调递增；

所以$x=x_1$和$x=x_2$分别是$f(x)$的极大值点和极小值点，与题目矛盾，

所以当$a>1$时，不满足题意舍去.

②当$0<a<1$时，设过原点的切线l与$y=a^x\ln a$的图象相切于点$(x_0,a^{x_0}\ln a)$，

而$y'=a^x(\ln a)^2$，此时切线l的斜率$k=a^{x_0}\cdot(\ln a)^2$，

所以$a^{x_0}(\ln a)^2=\dfrac{a^{x_0}\ln a}{x_0}$，可得$a^{x_0}=e$.

所以$k=e(\ln a)^2$，要使函数$y=a^x\ln a$与$y=ex$的图象有两个不同的交点，

则$k<e$，即$e(\ln a)^2<e$，

所以$(\ln a)^2<1$，即$\dfrac{1}{e}<a<e$，

又$0<a<1$，所以$\dfrac{1}{e}<a<1$.

综上所述，a 的取值范围是$(\dfrac{1}{e},1)$.

2.3 利用导数不等式构造函数

利用导数不等式构造函数通常有以下 6 个模型。

模型一：$f'(x)+f(x)\geq 0$构造$\left[e^xf(x)\right]'=e^x\left[f'(x)+f(x)\right]$；

模型二：$xf'(x)+f(x)\geq 0$构造$\left[xf(x)\right]'=xf'(x)+f(x)$；

模型三：$xf'(x)+nf(x)\geq 0$构造$\left[x^nf(x)\right]'=x^{n-1}\left[xf'(x)+nf(x)\right]$；

模型四：$f'(x)-f(x)\geq 0$构造$\left[\dfrac{f(x)}{e^x}\right]'=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$；

模型五：$xf'(x)-f(x)\geq 0$ 构造 $\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$；

模型六：$xf'(x)-nf(x)\geq 0$ 构造 $\left[\dfrac{f(x)}{x^n}\right]'=\dfrac{xf'(x)-nf(x)}{x^{n+1}}$.

其中模型三和模型六需要注意对于 x 的符号进行分类讨论。对于题目中直接出现的模型可以直接构造相应的函数进行解题，但通常还需要对题目中的式子进行相应的变形之后稍微变换模型中给出的函数，再对构造的函数进行求导后再解答，再变形的过程中，需要注意定义域的变化以及变形的等价性[7]。

例 6.（2024 湖南五市十校教研教改共同体大联考）设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，其导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)>f'(x)+1$，$f(2)=e^2+1$，则不等式 $e^{-x}f(x)\geq e^{-x}+1$ 的解集是（　）

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $[-1,2]$　　D. $[2,+\infty)$

分析：题目中当中的不等式通过移项可以得到与模型四相似的式子，但是还需要对模型中的式子进行适当的变形在左边的式子的分子减去 1 后，构造出与题目相符合的函数。

解析：设 $g(x)=\dfrac{f(x)-1}{e^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)+1}{e^x}$，

因为 $f(x)>f'(x)+1$，即 $f'(x)-f(x)+1<0$，

所以 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 R 上单调递减，又 $f(2)=e^2+1$，

所以 $e^{-x}f(x)\geq e^{-x}+1\Leftrightarrow \dfrac{f(x)-1}{e^x}\geq 1=\dfrac{f(2)-1}{e^2}$，

即 $g(x)\geq g(2)$，所以 $x\leq 2$，

所以原不等式的解集为 $(-\infty,2]$，故选 B.

例 7.（2024 安徽六安质量检测，11）已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，对任意的正数 x，都满足 $f(x)<xf'(x)<2f(x)-2x$，则下列结论正确的是（）

A. $f(1)<2f(\frac{1}{2})$　　B. $f(1)<\frac{1}{2}f(2)$　　C. $f(1)<4f(\frac{1}{2})-2$　　D. $f(1)<\frac{1}{4}f(2)+1$

分析：这道题目当中的给出的条件以及四个选项看上去会比较复杂，但其实忽略选项从题目所给出的条件入手可以看出模型五与模型六中所给出的式子，只需将前两个与后两个不等式转化为这两个模型中函数后，根据选项将相应的数字带入，就可以解决问题。

解析：设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$（$x>0$）则 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

由 $g(1)>g(\frac{1}{2})$ 得 $f(1)>2f(\frac{1}{2})$，故 A 选项错误；

由 $g(1)<g(2)$ 得 $f(1)<\frac{1}{2}f(2)$，故 B 选项正确；

设 $h(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x^2}$（$x>0$），则 $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-(2f(x)-2x)}{x^3}<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

由 $h(1)<h(\frac{1}{2})$ 得 $f(1)<4f(\frac{1}{2})-2$，故 C 选项正确；

由 $h(1) > h(2)$ 得 $f(1) > \frac{1}{4} f(2) + 1$，故 D 选项错误；故选 BC.

3 结语

3.1 深入题目，解析解题思路

在使用构造函数解答选题与填空题时，首先要引导学生仔细观察题目中的已知条件，分析这些条件的共性和特征。基于分析结果，学生应判断是否适合使用构造函数法，并选择最合适的解决策略。此外，学生需要学会通过变形或转化题目条件的方式，深入思考并结合构造函数的性质、其他数学工具以及解题技巧，从而简化问题、明确解题思路，提升解题效率和能力。通过这样的思考过程，学生不仅能解决具体题目，也能培养独立思考的能力[8]。

3.2 聚焦方法，明确解题方向

构造函数法在选择题与填空题中的应用形式多种多样。每一种构造函数方法都有其独特的选择和变换方式，有的可以直接构造，有的则需要借助参数分离等技巧。因此，学生应在日常的练习中积累经验，对不同问题类型进行分类和总结。当遇到不同类型的题目时，能够根据题目给出的条件或在初步尝试后，迅速找出合适的解题方法。最重要的是，学生应明白，方法的掌握不仅是理论学习，更要通过实践来验证其有效性，能够灵活地将解题方法与题目条件相对应。但是构造函数法并非万能的解题工具。该方法主要适用于具有明显函数特征、可转化为函数单调性或极值问题的代数式或不等式问题。对于一些结构复杂、涉及多变量或难以进行统一函数模型抽象的问题，直接的代数推理、特殊值代入法或数形结合法可能更为高效和直接。因此，学生需要培养对问题结构的敏感性，避免为了“构造”而构造，从而选择最简捷的解题路径。

3.3 融入教学，讲解问题类型

在日常教学中，教师首先应引导学生准确地观察和分析问题，并根据题目的特征展开解题思路的讲解。通过讲解常见的数学模型，教师能够帮助学生构建起系统的解题框架。同时，教师也应根据题目类型的变化，介绍不同的解题变式，使学生能够在变式的练习中发现解题方法的灵活性与多样性，培养“具体问题具体分析”的思维方式，从而在面对不同题目时，能够迅速找到适合的解题策略。

参考文献

[1] 李丽,曾伟梁. 浅谈高中数学中的导数同构问题[J].数理化学习(高中版),2025,(02):26-27.
[2] 程必赛. 例谈构造法解导数问题的两种技巧[J].数理天地(高中版),2024,(03):28-29.
[3] 林琳. 浅析高中数学解题中构造函数的有效应用[J].试题与研究,2024,(02):19-21.
[4] 王勇. 高中数学解题中构造函数的有效应用[J].数理化解题研究,2023,(31):50-52.
[5] 符晓燕. 高阶思维下高中数学比较大小的方法探究[J].数学之友,2022,36(17):67-69+72.
[6] 朱琳. 构造函数法在高中数学解题中的应用策略[J].数理天地(高中版),2023,(17):30-31.
[7] 赵文庆,陆万顺. 构造函数法在高中数学解题中的应用——基于 2021-2022 年全国卷的分析[J].数理化解题研究,2023,(07):41-44.
[8] 张卫兵. 刍议高中数学解题中构造函数法的应用[J].高中数理化,2021,(S1):4.