高考中解三角形问题的五种典型题型及求解策略

钱雨凌

扬州大学数学科学学院　江苏扬州

【摘要】本文以高考数学中解三角形问题为研究对象，旨在系统分析其题型特征与解题策略。通过梳理近五年全国高考试卷，归纳出五类典型题型：边角互换、面积计算、最值分析、取值范围和综合应用。针对每一类别，本文采用案例分析法，结合真题逐题剖析解题思路，并总结出相应策略，重点强调正弦定理、余弦定理、三角恒等变换及代数方法的灵活应用。该研究既有助于学生构建系统化的解题路径，提升题型识别与策略迁移能力，也可为高中数学教学与高考备考提供针对性参考。

【关键词】解三角形；高考；解题策略；正弦定理；余弦定理

【收稿日期】2025 年 5 月 14 日 **【出刊日期】**2025 年 6 月 18 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20250011

Five typical question types of triangle solving problems in the college entrance examination and their solution strategies

Yuling Qian

School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】This paper focuses on triangle-solving problems in the mathematics section of the National College Entrance Examination, aiming to systematically analyze their problem-type characteristics and solution strategies. By reviewing Gaokao mathematics papers from the past five years, five representative problem types are identified: side-angle interchange, area computation, extremum analysis, determination of value ranges, and integrated applications. For each category, a case-analysis approach is employed, examining authentic exam questions step by step and summarizing the corresponding strategies, with particular emphasis on the flexible application of the law of sines, the law of cosines, trigonometric identity transformations, and algebraic methods. The findings of this study not only assist students in constructing a systematic problem-solving framework and enhancing their ability to recognize problem types and transfer strategies, but also provide targeted guidance for high school mathematics instruction and Gaokao preparation.

【Keywords】Solving triangles; College entrance examination; Solution strategy; Law of sines; Law of cosines

1 全国高考试题解三角形试题类型以及特点

解三角形是高考数学中的必考内容之一。从近几年的高考试题来看，解三角形类题目的命题形式日益多样化，考查重点也越来越注重能力导向[1]。此类题目不仅关注学生对正弦定理、余弦定理、三角恒等变换及面积公式等基本知识点的掌握情况，更强调在综合情境中对相关知识的迁移与运用能力[2]。

这一命题趋势与《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》中提出的“突出数学核心素养，促进学以致用”的课程理念高度契合[3]。课标强调培养学生的数学思维与综合应用能力，要求能在多样情境中灵活运用知识解决问题。而解三角形作为融合几何、代数与三角函数的重要内容，是体现课程标准“知识整合、能力导向”理念的重要载体。

在题型分布上，解三角形问题多出现在选择题和填空题的中间位置，在解答题中一般位于前两小题的位置，整体难度一般为中等。基于对近五年全国各地高考试题的归类与分析[4]，本文将解三角形类问题归纳为

五类，简称T_1至T_5，分别为：T_1型（边角互换）、T_2型（面积计算）、T_3型（最值分析）、T_4型（取值范围）、T_5型（综合应用）。下文将依此结构展开策略分析。

2 真题解析

2.1 三角形的边角互换问题

解决三角形边角转化问题时，首先，需要明确题目条件中给出的是边长还是角度，并确定它们之间的关系，从而决定是将边长转化为角度，还是将角度转化为边长。其次，根据题目特征选择合适的定理，如正弦定理适用于边或正弦为齐次式的情况，余弦定理适用于边的二次或两边之积的情况。然后，利用选定的定理进行边角转化，将问题转化为更易于处理的三角函数问题或代数变形问题。最后，通过代数方法或三角恒等变换进一步简化问题，得到参数的取值范围或求解所需的未知量。

题 1（2021 年新高考 I 卷第 18 题）在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别是a,b,c,且满足$b=a+1,c=a+2.$

（1）若$2\sin C=3\sin A,$求ΔABC的面积；

（2）是否存在正整数 a，使得ΔABC为钝角三角形？若存在，求 a；若不存在，说明理由。

解析：（1）因为$2\sin C=3\sin A,$则由正弦定理可得$2c=2(a+2)=3a,$则$a=4,$故$b=5,c=6,$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{8},$所以 C 为锐角，则$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$，

因此，$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 4\times 5\times\dfrac{3}{8}\sqrt{7}=\dfrac{15}{4}\sqrt{7}$；

（2）由已知得$c>b>a,$若ΔABC为钝角三角形,则角 C 为钝角，由余弦定理可得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}{2a(a+1)}=\frac{a^2-2a-3}{2a(a+1)}<0.$$

解得$-1<a<3,$则$0<a<3,$由三角形三边关系可得$a>1,$又因为$a\in Z,$故$a=2.$

评注：本题重点考查正弦定理和余弦定理的应用，以及方程思想的运用。第一问利用正弦定理实现角到边的转化，求出三边后，借助余弦定理求出角 C 的余弦值，确定角 C 的范围后得到正弦值，再用面积公式求解，体现边角互化在求面积中的应用。第二问根据边的大小关系判断出哪个角是钝角，并利用余弦定理建立出关于 a 的不等式，结合三角形的三边关系以及 a 为正整数的条件，求解出 a 的具体值。通过定理实现边角转化，运用方程思想确定边长，凸显定理与思想结合解题的关键作用。

2.2 三角形的面积问题

解决三角形面积问题时，首先，应根据已知条件选择合适的定理，如正弦定理、余弦定理或三角形面积公式。其次，通过代数方法，将已知的边长或角度关系转化为面积表达式。然后，利用三角函数的性质和恒等变换，简化面积表达式。最后，根据三角形的几何特性，如角度范围、边长关系等，确定变量的合理取值范围，从而求解面积问题。

题 2（2024 年新高考 I 卷第 15 题）记ΔABC的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知$\sin C=\sqrt{2}\cos B,$ $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab.$

（1）求角 B；

（2）若 ΔABC 的面积为 $3+\sqrt{3}$，求 c.

解析：（1）因为 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$, 根据余弦定理可得：

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{\sqrt{2}ab}{2ab}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\dfrac{\pi}{4}$, 又因为 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$, 所以

$\sqrt{2}\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $\cos B=\dfrac{1}{2}$.

又因为 $B\in(0,\pi)$, 所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）因为 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=3+\sqrt{3}, B=\dfrac{\pi}{3}$, 所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=3+\sqrt{3}$, 即 $ac=4+4\sqrt{3}$. 因为 $C=\dfrac{\pi}{4}$,

$B=\dfrac{\pi}{3}$, 则 $\sin A=\sin(B+C)=\sin(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

由正弦定理可得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$, 所以 $a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}c$.

将 $a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}c$ 代入 $ac=4+4\sqrt{3}$ 中，得到 $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}c^2=4+4\sqrt{3}$，解得 $c=2\sqrt{2}$.

评注：本题注重余弦定理、正弦定理与方程思想的灵活运用。先由 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$ 结合余弦定理转化边角关系求得角 C，并通过 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$, 解出角 B；

随后利用三角形面积公式配合正弦定理构建 a 与 c 的关系方程，充分展示了边角转换与几何问题代数化相结合的解题思路。

2.3 三角形的最值问题

解决三角形最值问题时，首先应从已知条件中寻找切入点，合理利用三角函数进行变形。其次，要注意三角形中隐含的角、边限制条件以及角度范围[5]。有时需要运用三角形边角关系变换和辅助角公式，将不同角的三角函数统一转换为一个角的三角函数。在此过程中，需关注已知角与未知角、函数名称、次数、系数之间的关系。然后，利用诱导公式和三角函数基本关系式进行转化，将新问题转化为熟悉的问题，从而简化求解过程。最后，根据转化后的函数的单调性和极值点，确定最值，并验证其在三角形的几何特性范围内的合理性[6]。

题 3（2022 年新高考 I 卷第 18 题）记 ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

（1）若 $C=\dfrac{2}{3}\pi$，求 B；

（2）求$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值。

解析：（1）由$\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}=\dfrac{2\sin B\cos B}{2\cos^2 B}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$, 可得

$\sin B=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)=-\cos C=\dfrac{1}{2}.$

又因为$0<B<\dfrac{\pi}{2}$, 所以$B=\dfrac{\pi}{6}.$

（2）由（1）知$\sin B=-\cos C>0$，所以$\dfrac{\pi}{2}<C<\pi$, 则$0<B<\dfrac{\pi}{2}.$

又因为$\sin B=-\cos C=\sin(C-\dfrac{\pi}{2})$, 所以$C=\dfrac{\pi}{2}+B$, 则$A=\dfrac{\pi}{2}-2B.$

由正弦定理可得：
$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{c^2}&=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\cos^2 2B+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}\\&=\frac{(2\cos^2 B-1)^2+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}\\&=4\cos^2 B+\frac{2}{\cos^2 B}-5\\&\geq 2\sqrt{\frac{2}{\cos^2 C}\cdot 4\cos^2 C}-5=4\sqrt{2}-5.\end{aligned}$$

当且仅当$\cos^2 B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立，所以$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值为$4\sqrt{2}-5$。

评注：本题重点考查二倍角公式、三角恒等变换及基本不等式的综合应用。第一问通过将边角混合关系式转化为纯三角方程，巧妙利用两角和的余弦公式与角度范围限制，将$\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$化成$\sin B=\cos(A+B)$, 并结合三角形内角和隐含条件$A+B+C=\pi$, 最终确定角$B=\dfrac{\pi}{6}$, 展现了角关系转化的核心思想；第二问基于第一问结果，将角 A、C 统一用角 B 表示，通过正弦定理将边比转化为角的正弦函数，并借助二倍角公式将$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$化简为关于$\cos C$的二次函数形式，最终通过应用基本不等式求出最小值，体现了“代数化处理几何量”的典型策略。

2.4 三角形的取值范围问题

解决三角形取值范围问题时，首先识别问题中需要确定的参数（如角度、边长或面积），然后通过分离参数将问题转化为函数形式。接着，运用正弦定理、余弦定理等几何定理，结合平面几何、基本不等式和函数的单调性等知识，对函数进行分析[7]。利用导数分析函数的单调性和极值点，模拟函数图象，从而确定参数的取值范围。最后，验证所得范围是否符合三角形的几何特性，确保计算结果的正确性。

题 4（2019 年全国III卷第 18 题）△*ABC* 的内角 *A*，*B*，*C* 的对边分别为 *a*，*b*，*c*，已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A.$

（1）求 *B*；

（2）若△*ABC* 为锐角三角形，且 $c=1,$ 求△*ABC* 面积的取值范围。

解析：（1）因为 $\sin\dfrac{A+C}{2}=\sin\dfrac{\pi-B}{2}=\cos\dfrac{B}{2},$ 所以由 $a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A,$ 可得 $a\cos\dfrac{B}{2}=b\sin A,$

结合正弦定理得 $\sin A\cos\dfrac{B}{2}=\sin B\sin A=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin A.$

又因为 $\sin A>0,\cos\dfrac{B}{2}>0,$ 化简得 $\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2},$ 可得 $\dfrac{B}{2}=\dfrac{\pi}{6},$ 即 $B=\dfrac{\pi}{3}.$

（2）在△*ABC* 中，由余弦定理得 $b^2=a^2+1^2-2\times a\times 1\times\cos\dfrac{\pi}{3}=a^2-a+1.$

因为△*ABC* 为锐角三角形，所以可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0.$ 即 $b^2+c^2-a^2>0.$ （1）

将 $b^2=a^2-a+1$ 代入公式（1），可得 $(a^2-a+1)+1^2-a^2>0,$ 整理解得 $a<2.$

同样可得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0.$ 即

$$a^2+b^2-c^2>0 \tag{2}$$

将 $b^2=a^2-a+1$ 代入公式（2），得 $a^2+(a^2-a+1)-1^2>0,$ 整理得 $2a^2-a>0.$

又因为 $a>0,$ 故 $a>\dfrac{1}{2}.$

于是，可知边长 *a* 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},2\right),$ 从而可得 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times a\times 1\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$

故所求 ΔABC 面积的取值范围是 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$

评注：本题重点考查正弦定理、三角函数性质及锐角三角形性质的运用。第一问通过三角函数的诱导公式，将 $\sin\dfrac{A+C}{2}$ 转化为 $\cos\dfrac{B}{2}$，利用正弦定理求出角 *B*。第二问由余弦定理得出 b^2 关于 *a* 的表达式，再依

据锐角三角形的性质，利用余弦定理判断角 A、角 C 为锐角时边的关系，得到关于 a 的不等式，进而确定边 a 的取值范围。最后根据三角形面积公式，结合 a 的取值范围求出 ΔABC 面积的取值范围，体现了从几何条件向代数不等式转化，再结合函数性质求解范围的解题思路。

2.5 三角形的综合应用问题

解决三角形综合应用问题时，首先，需要仔细分析题目给出的已知条件和几何关系，识别关键的几何元素如角度、边长、高度等。其次，根据题目要求，选择合适的几何定理和公式，如正弦定理、余弦定理、三角形面积公式等，将问题转化为数学表达式。然后，利用几何作图、三角恒等变换或代数方法，对表达式进行化简和求解。最后，根据几何特性和实际情况，验证结果的合理性，并得出最终答案。

题 5（2021 年全国甲卷理科第 8 题）2020 年 12 月 8 日，中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86（单位：m），三角高程测量法是珠穆高程测量方法之一，三角高程测量法的一个示意图如图 1 所示，现有 A,B,C 三点，且 A,B,C 在同一水平面上的投影 A',B',C' 满足 $\angle A'C'B'=45^{\circ}$, $\angle A'B'C'=60^{\circ}$. 由 C 点测得 B 点的仰角为 15°，BB' 与 CC' 的差为 100；由 B 点测得 A 点的仰角为 45°，则 A,C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA'-CC'$ 约为（$\sqrt{3}\approx 1.732$）（ ）

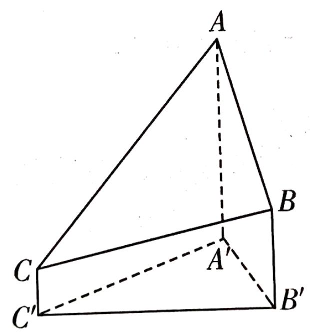

图 1　三角高程测量法的示意图

A.346　　B.373　　C.446　　D.473

解析：如图 2，过 C 作 $CE\perp BB'$, 过 B 作 $BD\perp AA'$,

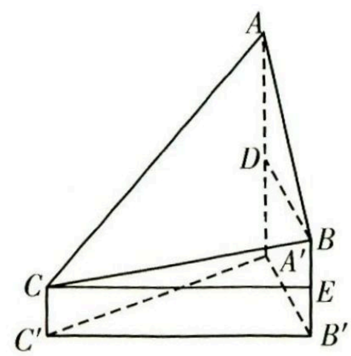

图 2　作图后的三角高程测量法的示意图

故 $AA'-CC'=AA'-(BB'-BE)=AA'-BB'+100=AD+100$, 由题意知 ΔADB 为等腰直角三角形，所以 $AD=DB$, 所以 $AA'-CC'=DB+100=AB'+100$.

因为 $\angle BCE=15^{\circ}$, 所以 $CE=C'B'=\dfrac{100}{\tan 15^{\circ}}$.

在$\Delta A'B'C'$中，由正弦定理得$\dfrac{A'B'}{\sin 45^\circ}=\dfrac{C'B'}{\sin 75^\circ}=\dfrac{100}{\tan 15^\circ \cos 15^\circ}=\dfrac{100}{\sin 15^\circ}$.

因为$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

$A'B'=\dfrac{100\times 4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=100(\sqrt{3}+1)\approx 273$, 则 $AA'-CC'=A'B'+100\approx 373$, 选 B。

评注：本题重点考查正弦定理的应用，以及空间与平面几何关系的转化思想。通过作辅助线，将空间中A、C两点到水平面的高度差问题，转化为平面三角形中的边长问题。利用仰角条件确定三角形的边与角关系，先求出$C'B'$。在$\Delta A'B'C'$中，敏锐识别正弦定理的应用条件，通过正弦定理求出$A'B'$，进而得出A、C两点高度差。充分体现了在解决空间几何测量问题时，将空间问题转化为平面问题，借助正弦定理等工具进行求解的策略，展示了几何关系转化与定理运用在解题中的关键作用[8]。

3 结语

通过对近五年高考数学中解三角形问题的深入分析，本文系统总结了五类典型题型及其解题策略。从边角互换到综合应用，每种题型都强调了正弦定理、余弦定理、三角恒等变换及代数方法的灵活运用。所归纳策略有助于考生形成系统化的解题路径，同时增强其在典型模型辨识与策略迁移中的应用能力。在高考备考中，学生应注重对这些方法的深入理解和实践，以增强解题的准确性和效率。同时，教师也应引导学生关注题型变化，培养其灵活运用知识的能力，从而更好地应对高考中的解三角形问题。

参考文献

[1] 朱贤良,徐维武.精心研究五题型轻松求解三角形[J].河北理科教学研究,2022,(02):1-7+10.

[2] 潘步升.单元整体教学背景下“解三角形”高考复习案例研究[J].教育与研究,2024(2):288-291.

[3] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）[M].北京：人民教育出版社,2020.

[4] 邢敦菊.高中数学解三角形常用策略之研究[J].数学学习与研究,2018,(01):141.

[5] 邵佳源.近年高考中四类解三角形试题的分析[J].中学数学,2023,(11):73-74.

[6] 龙正祥.基于创新思维培养的高考数学微专题设计——以“解三角形中最值问题”为例[J].中学数学,2022,(21):44-47.

[7] 孙承辉.解三角形中的范围或最值问题[J].中学生数理化(高考数学),2025,(02):42-43+48.

[8] 王小嵋. 新高考背景下解三角形题型分析及教学策略研究[D]. 海南师范大学, 2021.