波利亚“怎样解题表”在初中数学解题教学中的应用

——以 2024 年江西中考数学卷第 17 题为例

周理凤，王国威*

南昌工学院教育学院 江西南昌

【摘要】数学教育家乔治·波利亚提出的“怎样解题表”作为系统化解题方法论，为揭示数学思维规律提供了重要理论框架。本研究基于波利亚解题理论，选取 2024 年江西中考数学试卷第 17 题为研究对象，通过课堂观察与案例分析相结合的研究方法，系统呈现“理解问题-拟定计划-执行计划-检验反思”四阶段理论在中考试题解答中的具体实践路径。研究发现，解题表通过可视化思维过程能有效提升学生的问题表征能力与策略选择意识，但在迁移应用环节仍存在元认知监控不足等问题。通过还原解题过程中的思维路径与偏差分析，本研究提出教学改进建议，教师应注重解题过程的显性化指导，通过搭建“问题脚手架”发展学生自我提问能力，进而促进数学核心素养的培育。研究结果为初中数学解题教学提供了可操作的理论实践范式，对发展学生系统性思维品质具有现实指导意义。

【关键词】波利亚；怎样解题表；初中数学；数学解题活动；中考

【基金项目】南昌工学院教学改革研究项目（NGJG-2024-32）和南昌工学院一流本科建设培育项目（JXCGJ-PY-2024-065，TDJS-2024-123）资助的项目

【收稿日期】2025 年 5 月 14 日 **【出刊日期】**2025 年 6 月 18 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20250012

Application of Polya’s “How to Solve Problems” in junior high school mathematics problem solving teaching

—— Take the 17th question of Jiangxi Middle School Mathematics paper in 2024 as an example

*Lifeng Zhou, Guowei Wang**

Education of School, Nanchang Institute of Science & Technology, Nanchang, Jiangxi

【Abstract】The “how to solve the problem table” proposed by mathematics educator George Polya, as a systematic solution methodology, provides an important theoretical framework for revealing the law of mathematical thinking. Based on the Polya problem-solving theory, this study takes the 17th question of the 2024 Jiangxi High School Entrance Examination mathematics paper as the research object. Through the research method combining classroom observation and case analysis, this study systematically presents the specific practical path of the four-stage theory of “understanding the problem-making a plan-executing the plan-checking and reflecting” in the solution of the high school entrance examination questions. The study found that the problem-solving table could effectively improve students’ problem representation ability and strategy selection awareness by visualizing the thinking process, but there were still some problems such as insufficient metacognitive monitoring in the transfer application. By analyzing the thinking path and deviation in the process of problem solving, this study puts forward suggestions for teaching improvement. Teachers should pay attention to the explicit guidance of the problem solving process, develop students’ self-questioning ability through the construction of “problem scaffolding”, and then promote the cultivation of core mathematical literacy. The research results provide an operational theoretical practice paradigm for the teaching of junior high school mathematics problem solving, and have practical guiding significance for the

*通讯作者：王国威（1987-）男，博士，副教授，湖北安陆人，主要从事数学物理教育方面的研究。

development of students' systematic thinking quality.

【**Keywords**】Polya; How to solve the problem table; Junior high school mathematics; Mathematical problem solving activities; High school entrance examination

1 引言

波利亚解题理论诞生于 20 世纪中叶，由数学家乔治 •波利亚提出，旨在为解决数学问题提供系统方法。它的基础涵盖数学教育、认知心理学和哲学层面。波利亚在其经典著作《怎样解题》书中，详尽地构建了一套解题理论体系，他强调解题过程应分为理解问题、制定计划、执行计划及回顾反思这四个关键阶段（如图 1 所示），以此作为解决数学难题的基石。这套理论不仅为数学教育的后续研究与实践奠定了稳固的基础，更在国际上产生了深远的影响[1]。

数学教育领域，传统教学重结果轻过程，波利亚理论强调学生参与解题过程，激发主动思考，培养独立解决问题的能力，填补教学方法空白[2]。认知心理学角度，它契合人类认知规律。理解问题阶段，学生对信息编码、存储；拟定计划是思维探索，挖掘知识关联；执行计划考验知识运用和运算能力；回顾反思则强化记忆，优化认知结构，符合大脑学习机制[3]。哲学层面，体现了辩证法思想，解题各阶段相互关联、层层递进，帮助学生在不断实践中深化对数学本质的理解，提升数学思维和素养，成为数学教育经典理论。在数学教育的范畴内，几何学在初中阶段扮演着至关重要的角色[4]。它不仅对于锻炼学生的逻辑推理和空间想象力至关重要，而且是帮助学生深刻理解数学概念、掌握数学技巧的关键工具。但是，目前在初中几何教学中，学生普遍遭遇难题，这严重妨碍了他们数学能力的提高[5]。波利亚的解题理论，作为数学教育领域的经典理论之一，详细描述了从理解问题、制定方案、执行方案到反思总结的全面解题步骤，为解决数学难题提供了科学而实用的途径。将波利亚的解题理论应用于初中几何教学，能够帮助学生形成明确的解题思路，掌握有效的解题方法，从而增强解题技能[6]。

笔者以一道 2024 年江西中考数学试卷中的第 17 题作为案例，展示教师如何运用“怎样解题表”中的相关步骤、问题和建议引导学生解题[7]。本文研究的目标是深入分析波利亚解题理论在初中几何问题解决中的运用，结合理论与实际操作，寻找适合初中几何教学的解题方法，为提高教学品质和学生学习成效提供有力的支持。

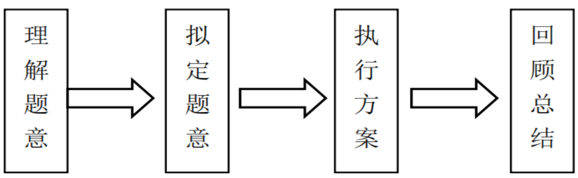

图 1　波利亚解题步骤流程图

2 题目呈现

真题：如图 2 所示，AB 是半圆 O 的直径，点 D 是弦 AC 延长线上一点，连接 BD，BC，$\angle D=\angle ABC=60°$。（1）求证：BD 是半圆 O 的切线；（2）当 BC=3 时，求 $\overset{\frown}{AC}$ 长。

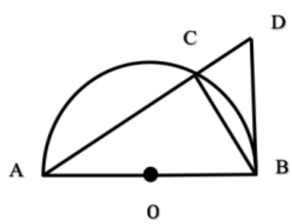

图 2　2024 年江西中考数学试卷的第 17 题图

3 题目解答过程

3.1 理解问题阶段

3.1.1 所求问题分析

问题（1）：求证 BD 是半圆 O 的切线。根据圆的切线定义，若要证明直线 BD 是半圆 O 的切线，需证明 BD 与半圆 O 的半径 OB 垂直，即证明$\angle ABD = 90°$。这就需要我们利用已知的角度信息和三角形内角和等知识进行推导。

问题（2）：当$BC = 3$时，求 $\overset{\frown}{AC}$的长。在圆中求弧长，我们需要知道弧所对圆心角的度数以及圆的半径。因此，要通过已知条件寻找圆心角∠AOC（O 为圆心）的度数和圆的半径，进而利用弧长公式$l = \mathrm{n\pi r}/180$（其中 l 为弧长，n 为圆心角度数，r 为半径）来计算弧长。

3.1.2 绘制清晰图形辅助理解

在本题中连接 OC（如图 3）主要有以下两个目的：

利用圆心角与圆周角关系求圆心角：

连接 OC，则∠AOC 是弧 $\overset{\frown}{AC}$所对的圆心角 ，∠ABC 是弧 $\overset{\frown}{AC}$所对的圆周角。因为$\angle ABC = 60°$，所以$\angle AOC = 2\angle ABC = 120°$，而圆心角∠AOC 的度数是求弧 $\overset{\frown}{AC}$长度的关键要素之一。

3.1.3 构造特殊三角形求半径

因为 OC 和 OB 都是半圆 O 的半径，即$OC = OB$。因为$\angle ABC = 60°$，所以三角形 BOC 是等边三角形。又因为$BC = 3$，所以$OC = BC = 3$。这样就得到了圆的半径。而半径也是求弧长公式$l = n\pi r/180$（其中 l 为弧长，n 为圆心角度数，r 为半径）中不可或缺的条件。

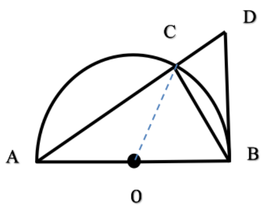

图 3 连接 OC 构造特殊三角形

3.2 拟定计划阶段

3.2.1 对于问题（1）

明确目标：要证明 BD 是半圆 O 的切线，根据切线定义，需证$\angle ABD = 90°$。

紧接着思考如何能得到$\angle ABD = 90°$，需要利用三角形内角和为 180°来推导角度。

基于已知$\angle ACB = 90°$，在三角形 ABC 中，$\angle A + \angle ABC = 90°$。

又因为$\angle D = \angle ABC$，所以可以通过等量代换，将∠ABC 替换为∠D，得到$\angle D + \angle A = 90°$。

在三角形 ABD 中，根据三角形内角和为 180°，由$\angle D + \angle A = 90°$，可推出$\angle ABD = 180° - (\angle D + \angle A) = 90°$，从而证明 BD 是半圆 O 的切线。

3.2.2 对于问题（2）

明确目标：求弧 $\overset{\frown}{AC}$的长，根据弧长公式$l = \mathrm{n\pi r}/180$（l 为弧长，n 为圆心角度数，r 为半径），需要知道圆心角∠AOC 的度数和半径 r。关于圆心角∠AOC，若能找到弧 $\overset{\frown}{AC}$所对的圆周角即可求出∠AOC，关于半径 r，考虑能否构建与已知线段$BC = 3$相关的特殊三角形来求半径，即可求出。

连接 OC，根据同弧所对的圆心角是圆周角的两倍这一性质，因为∠ABC 是圆周角且$\angle ABC = 60°$，所以圆心角$\angle AOC = 2\angle ABC = 120°$。

由于$OC = OB$（半圆 O 中半径相等），且$\angle ABC = 60°$，根据等边三角形的判定（有一个角是 60°的等腰三角形是等边三角形），可知三角形 BOC 是等边三角形。

因为三角形 BOC 是等边三角形，且已知$BC = 3$，所以$OC = BC = 3$，即得到圆的半径$r = 3$。

最后，将圆心角$\angle AOC = 120°$和半径$r = 3$代入弧长公式$l = n\pi r/180$，即可求出 $\overset{\frown}{AC}$的长。

3.3 执行计划阶段

3.3.1 对于问题（1）

证明 BD 是半圆 O 的切线。

计算角度：根据 AB 是半圆 O 的直径，得出$\angle ACB = 90°$。在三角形 ABC 中，利用三角形内角和 180°，由$\angle ABC = 60°$，计算出$\angle A = 30°$。

进行等量代换与推导：因为$\angle D = \angle ABC = 60°$，所以$\angle A + \angle D = 90°$。在三角形 ABD 中，根据三角形内角和为 180°，得出$\angle ABD = 90°$，从而证明 BD 是半圆 O 的切线。

3.3.2 对于问题（2）

求$\overset{\frown}{AC}$的长。

求圆心角：连接 OC，根据同弧所对圆心角是圆周角的两倍，由$\angle ABC = 60°$，得出$\angle AOC = 120°$。

求半径：由$OC = OB$，$\angle ABC = 60°$，判定三角形 BOC 是等边三角形，因为$BC = 3$，所以$OC = 3$，即半径$r = 3$。

计算弧长：将$\angle AOC = 120°$和$r = 3$代入弧长公式$l = n\pi r/180$，计算出$\overset{\frown}{AC}$的长为 2π。

3.3.3 具体解题过程

解：（1）证明：∵AB 是半圆 O 的直径，∴$\angle ACB = 90°$，∴$\angle A + \angle ABC = 90°$；

∵$\angle D = \angle ABC$，∴$\angle D + \angle A = 90°$，∴$\angle ABD = 90°$；

∵AB 是半圆 O 的直径，∴BD 是半圆 O 的切线。

（2）连接 OC，如图 3。

∵$\angle ABC = 60°$，∴$\angle AOC = 2\angle ABC = 120°$；

∵$OC = OB$，∴三角形 BOC 是等边三角形；

∴$OC = BC = 3$，∴$\overset{\frown}{AC}$的长$= 120\pi \times 3/180 = 2\pi$。

3.4 回顾反思阶段

3.4.1 检查答案的正确性与完整性

对于问题（1）：检查证明 BD 是半圆 O 切线的正确性与完整性。

逻辑推理检查：

证明从“AB 是半圆 O 的直径推出$\angle ACB = 90°$”，依据的是圆的基本性质“直径所对的圆周角为 90°”，此推理正确。

接着在三角形 ABC 中，利用三角形内角和 180°，由$\angle ACB = 90°$和$\angle ABC = 60°$求出$\angle A = 30°$，计算过程正确。

因为$\angle D = \angle ABC = 60°$，所以$\angle A + \angle D = 90°$，这一步等量代换合理。

最后在三角形 ABD 中，根据三角形内角和得出$\angle ABD = 90°$，进而证明 BD 是半圆 O 的切线，整个逻辑链条完整且推理合理。

条件使用检查：

题目所给的“AB 是半圆 O 的直径”“$\angle D = \angle ABC = 60°$”等关键条件均在证明过程中被充分利用，没有遗漏重要条件。

对于问题（2）：检查求$\overset{\frown}{AC}$的长的正确性与完整性

计算过程检查：

连接 OC 后，根据“同弧所对的圆心角是圆周角的两倍”，由$\angle ABC = 60°$得出$\angle AOC = 120°$，这一步符合定理应用，计算正确。

由于$OC = OB$，结合$\angle ABC = 60°$，依据“有一个角是 60°的等腰三角形是等边三角形”判定三角形 BOC 是等边三角形，进而得出$OC = BC = 3$，推理和计算无误。

把$\angle AOC = 120°$和$r = 3$代入弧长公式$l = n\pi r/180$，计算$120\pi \times 3/180 = 2\pi$，计算过程准确。

完整性检查：

求弧长需要知道圆心角和半径，整个过程完整地求出了圆心角∠AOC 的度数和半径 r 的值，并代入弧长公式得出结果，步骤完整，不存在跳步或缺失关键环节的情况。

3.4.2 需要掌握的解题知识点

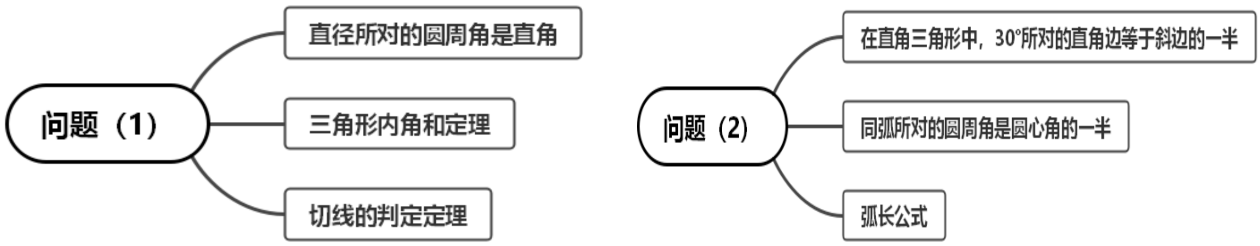

图 4　解题需要运用的知识点归纳

根据以上问题的分析，可总结得出同类问题的解题规律与本题类似的几何问题通常涉及圆的性质、三角形相关定理等知识，其解题规律可总结如下：

证明切线问题。

寻找直角：首先观察是否有直径，利用“直径所对的圆周角是直角”这一性质找到直角，为证明垂直创造条件。若没有直接给出直径相关条件，就从已知的角度关系、三角形的性质等入手，通过计算角度来证明某条直线与半径或直径的夹角为 90°。

利用角度关系：根据题目中给出的角相等、角的度数等条件，通过三角形内角和定理、外角定理等进行角度的计算和推导，最终得出直线与圆的半径或直径的夹角为直角，从而证明直线是圆的切线。

求弧长问题。

确定圆心角：根据同弧所对的圆心角是圆周角的两倍这一性质，由已知的圆周角求出圆心角的度数。若题目中没有直接给出圆周角与圆心角的关系，则需要通过其他条件，如三角形的内角关系、圆的内接四边形性质等，间接求出圆心角。

求出半径：观察图形中是否存在等腰三角形、等边三角形等特殊三角形，利用其性质求出半径。若没有明显的特殊三角形，则可能需要通过相似三角形、勾股定理等方法来计算半径。

计算弧长：将求出的圆心角 n 和半径 r 代入弧长公式$l = n\pi r/180$，准确计算出弧长。

4 总结与思考

波利亚“怎样解题表”虽在初中数学解题教学中应用广泛，但也存在一定不足。在时间限制上，中考等考试时间紧张，学生按四个步骤逐步分析，难以在有限时间内完成解题，如案例这道题，从前面分析可以感受到，常规分析步骤会耗费大量时间，影响整体答题进度。

在日常教学中，教师需培养学生审题习惯，引导学生多读题，圈画关键条件，学会用不同方式表征题目，如画图、列表等，帮助学生理解题意，挖掘隐含条件。其次，教师需强化解题策略指导，展示多种解题策略，如转化、类比、从特殊到一般等，让学生积累经验。针对不同类型题目，引导学生分析适用策略，提高拟订计划的能力。最后，教师应教导学生注重解题后的反思，鼓励学生回顾解题过程，总结方法，思考题目变化，开展一题多解、一题多变训练，培养学生思维的灵活性和深刻性，提升解题能力。在长期锻炼下，就能在解题时形成一套解题理论的构建，并快速做到心中有数，找出突破口，准确快速解题。

波利亚“怎样解题表”为初中数学解题教学提供了有效框架，本文通过对 2024 年江西省中考数学试卷第 17 题的分析，展示了其在引导学生理解题目、拟订计划、实现计划和回顾反思方面的作用。在教学中应用解题表方法，能帮助学生掌握解题方法，提高解题能力，培养数学思维。

参考文献

[1] 邓新星,莫宗赵,周莹. 基于波利亚“怎样解题表”的解题教学研究——以“解三角形”为例[J]. 中学数学研究(华南师范大学版),2020,24: 23-25.

[2] 张雁. 基于波利亚解题思想的解题教学思考——以 2020 年高考全国 II 卷理科数学第 21 题为例[J]. 中学数学研究(华南师范大学版),2021,12: 37-41.

[3] 杨晶玉. 波利亚“怎样解题表”在初中数学解题教学中的应用——以济南市中考题为例[J]. 理科考试研究,2023,30(22): 9-11.

[4] 廖志坚,李志文. “波利亚解题表”在高中数学解题教学中应用探究——以 2012 年广东高考理科数学 20 题为例[J]. 数学教学研究,2024,43(05): 28-30.

[5] 周理凤,王国威. 基于文献计量法的波利亚接替表在初中数学中的应用现状研究与可视化分析[J].中国科技经济新闻数据库 教育,2025,02: 163-167.

[6] 李志平,陈益智,王海青. 从波利亚的解题思想谈数学解题教学——以一道“折纸问题”为例[J]. 中学教研(数学),2023,09: 9-12.

[7] 波利亚. 怎样解题数学思维的新方法[M]. 涂泓,冯承天译. 上海:上海科技教育出版社,2011.