

富足半群中格林关系与胞腔性结构的关系研究

卢晓明

广东工业大学 广东广州

【摘要】富足半群作为半群理论中的重要结构类型，其内部元素在理想生成、局部对称性与幂等分布方面表现出丰富特征。格林关系能够从整体层面描述元素在左右理想意义下的等价性，而胞腔性结构则从局部行为入手，对半群进行更精细的划分。本文围绕二者在富足半群中的相互关系展开讨论，分析格林关系如何为胞腔划分提供结构框架，以及胞腔性结构如何进一步细化格林类内部的代数特征。研究表明，二者结合后可形成更清晰的结构表达，有助于通过多层次视角理解富足半群的整体规律，为进一步探讨半群的局部与全局结构提供参考。

【关键词】富足半群；格林关系；胞腔性结构；等价分类；代数结构

【收稿日期】2025年8月5日 **【出刊日期】**2025年9月10日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20250024

Study on the relationship between Green's relationship and cellular structure in the abundant semigroup

Xiaoming Lu

Guangdong University of Technology, Guangzhou, Guangdong

【Abstract】 As an important structural type in semigroup theory, the abundant semigroup exhibits rich characteristics in terms of ideal generation, local symmetry and idempotent distribution of its internal elements. Green's relation can describe the equivalence of elements in the left-right ideal sense from an overall perspective, while the cellular structure starts from the local behavior and makes a more refined division of the semigroup. This paper discusses the interrelationship between the two in the abundant semigroup, analyzes how the Green relation provides a structural framework for cell division, and how the cellular structure further refines the algebraic features within the Green class. Research shows that the combination of the two can form a clearer structural expression, which is conducive to understanding the overall law of the abundant semigroup from multiple perspectives and provides a reference for further exploration of the local and global structure of the semigroup.

【Keywords】Abundant semigroup; Green Relationship; Cellular structure; Equivalent classification; Algebraic structure

引言

半群理论长期关注运算封闭系统内部的结构规律，而富足半群因其幂等元素多、局部行为稳定等特点，被视为适合进行结构分析的典型对象。在描述半群内部的分类方式时，格林关系提供了宏观的等价框架，使研究者能够从整体上理解元素之间的层级关系；与此同时，胞腔性结构作为近年提出的局部化分析方式，强调通过细分局部行为揭示更微观的代数特征。将两者结合研究，不仅能够弥补单一结构工具的不足，还能在全局分类与局部分解之间建立桥梁。基于此，本文从理论层面对两种结构的互动方式及其在富足半群中的意义进行探讨。

1 格林关系在富足半群中的结构表现

1.1 格林关系在富足半群中的适用性与结构特征

作者简介：卢晓明（1995-）男，汉族，广东阳西人，硕士，研究方向：半群代数。

在一般半群理论中，格林关系是研究元素分类层级的重要工具，通过构建 $L, R, H, D, J \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{J}$ 五类关系来揭示半群内部的等价性结构。然而，在富足半群中，格林关系的结构表现更为清晰，其原因在于富足半群含有大量与单位元素行为接近的元素，使其内部的理想结构具有高度稳定性。正是这种稳定性，使得格林关系在富足半群上不仅适用，而且能够呈现比一般半群更高的区分精度。例如， $L \mathcal{L} L$ 关系在富足半群中常常具有更稳定的左右作用特征，其等价类的边界更容易由特定的幂等元素确定，这种结构化的分布为富足半群的分类研究提供了更便捷的途径。

另一方面，富足半群的特点之一是其幂等元素的稠密性，而幂等元素恰好是界定格林关系的重要节点。在富足半群中，每个元素通常都可以找到与之相关的幂等元素，使其在格林类中的位置更容易被确定。幂等元素作为局部对称性的重要来源，有助于强化格林类内部的结构一致性。由于幂等元素能够在左右理想的生成中起主导作用，因此格林关系在富足半群中往往呈现出“局部稳定、整体可控”的特征。这一性质不仅强化了格林关系的分类能力，也为后续讨论胞腔性结构与格林类的互动提供了理论基础。

1.2 富足性条件对格林类划分的强化作用

富足性为半群带来的最重要影响，是提升结构的局部对称性和对子结构的可分解性。这种影响在格林关系中表现得尤为明显。由于富足半群中的元素往往具有可分解、可替代的性质，其左右理想的生成方式更加规则，因此格林类的划分更加细致。例如，在许多富足半群中，不同 $R \mathcal{R} R$ 类之间的边界可以通过幂等元素的“支配作用”清晰区分，这使得研究者能够快速确定元素在右理想结构中的位置。

此外，富足性条件还强化了格林关系的“相容性”。在一般半群中，格林类之间的结构边界可能存在模糊或重叠的情况，而富足半群中的富足性使得这种模糊性被显著降低。当富足性与幂等元素的分布结合时，每个格林类往往能够对应到较为清晰的代数子结构，如特定的子幺半群或稳定的局部子代数。这意味着格林关系不再仅仅是分类工具，而是成为描述富足半群内部子结构的一种方式。研究者可以利用这些格林类构建更大的结构图景，为后续研究胞腔性结构如何嵌入格林划分提供重要参考。

2 富足半群中的胞腔性结构及其理论基础

2.1 胞腔性结构的概念与在半群理论中的引入背景

胞腔性结构最初用于描述代数结构内部的局部划分，是将半群中的元素按照局部特征、理想关系和邻接性质划分为若干“胞腔”的一种方法。其思想与拓扑学中的胞腔分解有一定相似之处，即通过构建局部区域揭示结构的整体规律。在半群理论中，胞腔性结构的引入是为了弥补传统理想划分在细节表达上的不足。特别是在富足半群中，由于不同元素之间存在复杂的可替代性与近幺元行为，传统的理想划分有时候无法表达其局部代数特征。

胞腔性结构之所以能够在富足半群中发挥作用，是因为富足半群内部大量幂等元素所形成的局部对称性为胞腔划分提供了天然的支撑。胞腔通常围绕一个具有标志性的幂等元素展开，通过考察该幂等元素周围的代数行为、左右作用及理想生成规则，可以将与之行为相似的元素纳入同一个胞腔。这样的分区方式不仅便于揭示半群内部的复杂连接关系，也使得研究者能够从“局部行为决定整体结构”的角度审视富足半群的代数性质。随着胞腔划分不断细化，它逐渐演变为表达富足半群局部结构的重要工具，为后续研究格林关系如何映射到胞腔结构提供了条件。

2.2 富足半群中胞腔结构的生成方式与核心性质

富足半群中的胞腔结构一般围绕幂等元素生成，这与富足半群的性质密切相关。在胞腔生成过程中，研究者会选取一个幂等元素作为“代表点”，并通过定义与该幂等元素相关的左右作用空间，将具有相似行为的元素纳入一个胞腔。例如，若某元素与幂等元素在右作用上具有一致的理想生成方式，那么它们往往属于同一个胞腔。这种以幂等元素为中心的分区方法，使胞腔结构能够直接反映富足半群在局部区域的对称性和稳定性。由于富足半群中幂等元素的数量丰富，每个幂等元素都可以成为潜在的胞腔中心，从而促成“多胞腔重叠”的局部结构现象，使富足半群呈现出层次分明的整体形态。

胞腔性结构在富足半群中的另一个重要性质是其“局部同构性”，即同一胞腔中的元素往往具有相似的代数行为，甚至可以被视为局部意义下的同构对象。这使得研究者在分析富足半群复杂结构时，不需要逐一讨论每个元素的性质，而可以通过研究胞腔代表元素来把握整体规律。此外，胞腔性结构还具备“稳定性”特征，即胞腔分布在一定条件下不会随操作变化而发生剧烈调整，从而维持半群内部结构的连续性。这种稳定性对于研究格林关系与胞腔结构之间的对应意义重大，因为格林类的稳定是研究胞腔结构能否有效映射的前提。

3 格林关系与胞腔性结构的对应机制与相互作用

3.1 格林类对胞腔划分的影响与约束作用

在富足半群中，格林关系对于胞腔结构的形成具有明显的约束和导向作用。由于格林类刻画了元素在左右理想生成中的等价性，它在本质上反映了半群内部的结构骨架。胞腔结构的划分往往需要以这些骨架为基础进行构建，因此不同格林类之间的分界常常成为胞腔分割的重要参照。在许多富足半群中，一个胞腔往往不会跨越多个具有完全不同理想结构的格林类，这意味着格林关系可以被视为胞腔划分的“粗粒度框架”。研究者通过理解格林类的整体形态，能够预测胞腔可能的分布区域，减少在分析其局部特征时的复杂性。

另一方面，格林关系提供了胞腔内部行为一致性的理论基础。在同一个格林类中，由于元素在左理想或右理想上表现出高度相似性，它们在构建胞腔结构时往往能够自然聚合到同一局部区域。例如，在多数富足半群中，同一 \mathcal{L} 类中的元素会共享类似的左作用特征，从而在胞腔生成的过程中，它们更容易被归入同一类型的结构模块。这种“天然一致性”不仅简化了胞腔划分的过程，也使胞腔结构具备了更好的局部稳定性。格林类与胞腔之间的对应关系因此被视为富足半群结构分析的基础性内容，成为研究富足半群局部代数行为的起点。

3.2 胞腔结构对格林类内部关系的细化作用

胞腔性结构在一定意义上可以视为对格林关系的一种细化机制，尤其是在富足半群中，胞腔结构能够将传统格林类的内部细节进一步拆分，使结构分析更加精确。在一般半群中，一个格林类可能包含大量行为复杂、结构难以统一的元素，而富足半群通过细密的胞腔结构，将这些元素按照局部行为模式进一步划分成多个小区域，使得研究每一类元素的行为更加可控。例如，同属于一个 \mathcal{D} 类的元素，若它们在胞腔性质上存在差异，那么胞腔划分可以将其进一步区分，从而使研究者可以识别其在左右作用之外的更深层差异。这种细化能力弥补了格林关系的不足，使结构研究更加精细化。

胞腔结构对格林类的细化不仅体现在增强区分能力上，也体现在提升结构解释力方面。当一个格林类被拆分为多个胞腔时，研究者可以更容易分析这些胞腔之间的关系，如它们是否能够通过局部幂等元素关联、是否能够构成局部同构结构等。这种探讨有助于揭示富足半群内部的层级性或嵌套性，从而赋予格林关系更丰富的结构解释。例如，在某些富足半群中，不同胞腔之间的映射关系可以反映出半群内部的局部对称性或替代结构，而这些规律通常不可能仅通过格林关系观察到。胞腔结构因此在富足半群研究中起到了桥梁作用，使格林关系所定义的宏观骨架能够与半群的微观行为有机结合。

4 格林关系与胞腔性结构结合后的结构意义与推广价值

4.1 二者融合对富足半群整体结构刻画的提升作用

格林关系与胞腔性结构的结合，使得富足半群的整体结构呈现出更高的可解释性与层次性。在传统半群理论研究中，格林关系主要用于宏观意义上的分类，而胞腔性结构则强调局部层面的细节划分。当两者结合时，富足半群的结构得以从“整体分类—局部分析”的双层框架中被完整呈现出来。这种多层次结构不仅让研究者能够从宏观上把握半群的组织形式，也能够从微观角度深入理解元素之间的作用关系。例如，通过格林类确定全局骨架，再由胞腔结构划定局部区域，研究者可以迅速确定某一元素在半群中的位置，进而推断其在理想结构、幂等支撑以及局部对称性中的地位。

同时，格林关系与胞腔性结构的融合，还提升了富足半群在理论推导中的稳定性与严密性。由于胞腔结构可以细化格林类，使得许多原本难以解释的结构现象在胞腔层面变得清晰。例如，一些模糊的等价关系、

难以区分的局部子结构在胞腔划分后具有明确边界；而格林类作为整体框架，则为这些胞腔结构提供了稳定的关系体系。两者相辅相成，使富足半群在整体结构描述中表现出更高的逻辑一致性。这种一致性对于构建进一步的代数模型，如局部幺半群结构分析、分层半群模型或富足半群的图式化表达，具有重要意义。通过融合两种工具，研究者能够更准确地推导富足半群的性质，也能更有效地构建其应用模型。

4.2 融合结构在广义半群理论中的推广与潜在应用

格林关系与胞腔结构的结合不仅对富足半群本身具有价值，也为广义半群理论的研究提供了可推广的范式。在许多类型的半群中，如逆半群、正则半群或含额外约束的代数系统，局部对称性与理想结构同样发挥着关键作用。通过引入类似富足半群的胞腔划分方法，研究者能够在这些半群中构建更精细的结构分析框架。例如，在逆半群中，由于幂等元素也具有明显的局部支配性，其胞腔结构能够类似富足半群那样围绕幂等元素展开。结合格林关系后，可以形成新的结构模型，用于解释逆半群内部的局部行为差异。这样的推广方式不仅能够提升理论深度，也能增强半群结构分析的普遍性。

此外，格林关系与胞腔结构的融合对于应用型数学与计算领域也具有潜在价值。在自动机理论、形式语言理论以及代数拓扑等领域，半群结构往往被用来刻画状态变化、代数运算或空间形态。胞腔结构能够直观呈现局部变化模式，而格林关系则提供状态分类的框架。两者结合后，可以为这些领域构建更加稳定和可解释的模型。例如，在自动机状态结构的分析中，使用格林关系划分状态类型，再通过胞腔结构细化局部转换行为，可以形成层级更加分明的状态图，为复杂系统的分析提供更强的工具。在计算代数中，格林类与胞腔结构的嵌套关系也可以用于优化算法结构，使得代数运算的分解更加高效。这表明两者的结合不仅具有理论价值，也能在实践层面发挥作用。

5 结论

通过对格林关系与胞腔性结构的综合分析，本文指出二者在富足半群中的关系具有明显互补性。格林关系从理想结构和等价类角度提供了全局框架，使半群的整体层次更加明确；而胞腔性结构则从局部行为出发，对格林类内部差异进行细化，从而提升结构描述的精确度。二者结合能够构建出既有宏观层次又具备微观细节的结构模型，对于理解富足半群内部的组织规律具有重要意义。相关研究方法还可推广至其他类型半群，为半群理论的发展与结构分析提供新的思路。

参考文献

- [1] 严庆富,晏潘,王守峰.半群 $PT(X,A)$ 的格林*-关系和富足性[J].数学的实践与认识,2024,54(04):221-225.
- [2] 崔乐乐.U-超富足半群同余的若干研究[D].西安建筑科技大学,2022.
- [3] 彭妍.富足半群上三种有向图的 D-饱和性[D].江西师范大学,2023.
- [4] 严庆富,晏潘,王守峰.半群 $PT(X,A)$ 的格林*-关系和富足性[J].数学的实践与认识,2024,54(04):221-225.
- [5] 刘幸.富足半群若干结构性质研究[D].山东师范大学,2019.
- [6] 刘会芹,尹国荣.若干特殊半群的理想结构与等价关系研究[J].安徽大学学报(自然科学版),2017,41(6):45-50.
- [7] 戴维华.半群中幂等元素的分布及其结构作用[J].高校应用数学学报,2015, 30(2):131-138.
- [8] 余子木.半群局部结构的若干性质研究[D].湖南师范大学,2020.

版权声明：©2025 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS