

刍议初中几何竞赛题中的建系法

顾思捷

扬州大学数学学院 江苏扬州

【摘要】本文探讨建系法在初等几何问题中的应用价值，分析其在提高解题效率、简化推理过程方面的作用。本文通过对三个竞赛题的系统分析，揭示建系法如何将复杂的几何推理转化为可程序化执行的代数运算。研究发现，与传统几何法相比，建系法解题过程更直接、思路更清晰，可以将复杂的几何关系转化为清晰的代数关系，减少对辅助线构造和复杂图形推理的依赖，使解题过程更具条理性、规范性和可操作性，在规则图形及数量关系较明显的题目中优势尤为突出。研究表明，建系法能有效降低辅助线构造难度，提供稳定的解题路径^[1]，有助于落实数形结合思想、提升学生的几何解题能力。

【关键词】建系法；几何；初中数学竞赛；几何解题

【收稿日期】2026 年 3 月 14 日 **【出刊日期】**2026 年 4 月 18 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20260001

A discussion on the coordinate method in junior high school geometry competition problems

Sijie Gu

School of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 This paper explores the application value of the coordinate method in elementary geometry problems and analyzes its role in improving problem-solving efficiency and simplifying the reasoning process. Through a systematic analysis of three competition problems, the paper reveals how the coordinate method transforms complicated geometric reasoning into algebraic operations that can be carried out in a more procedural way. The study finds that, compared with traditional geometric methods, the coordinate method offers a more direct solving process and a clearer line of thought. It can convert complicated geometric relationships into explicit algebraic relations, reduce reliance on auxiliary constructions and complex figure-based reasoning, and make the solution process more organized, standardized, and operable. Its advantages are especially evident in problems involving regular figures or relatively explicit quantitative relationships. The results show that the coordinate method can effectively reduce the difficulty of constructing auxiliary lines, provide a stable approach to problem solving ^[1], and help implement the idea of combining numbers with figures, thereby enhancing students' ability to solve geometric problems.

【Keywords】 Coordinate method; Geometry; Junior high school mathematics competitions; Geometric problem solving

1 问题的提出

几何一直是初中数学竞赛中的重要内容，也是许多学生在竞赛训练中最容易感到困难的部分之一。其原因在于，几何题往往不是简单地套用公式即可完成，而是需要在图形中发现隐藏关系，借助恰当的辅助线构造、角度追踪、全等相似判定或面积转化等方法，逐步推进求解^[2]。这种解题方式虽然能够体现数学思维的灵活性和创造性，但也常常因为思路不易把握、构造路径不够稳定而给学生带来较大的认知负担。

尤其在竞赛题中，题目的条件设置更为隐蔽，图形关系更为复杂，若完全依赖传统纯几何推理，往往容易出现“看得懂图，却下不了手”的情况。有些题虽然理论上可以用几何方法解决，但对于一般学生而言，要在较短时间内准确找到突破口并不容易。正因如此，如何为学生提供一种更具操作性、步骤更明确、结果

更稳定的几何解题路径，成为几何教学与竞赛训练中值得关注的问题。

建系法并非一种全新的解题方法，在初中数学教学中已有一定涉及。但相较于一般几何题，初中几何竞赛题往往条件更复杂、图形关系更隐蔽、推理链条更长，因此更需要借助代数化手段提升解题效率。本文并不着重讨论建系法的一般性介绍，而是立足初中几何竞赛题的特点，对建系法的使用原则、常见技巧及典型应用进行归纳分析，以期能为竞赛几何解题提供较为清晰的操作路径。

建系法的核心在于通过坐标系实现“形”与“数”的转化。建系法中，坐标原点的选取需遵循三原则：简化关键点坐标、便利几何关系表达、优化代数运算复杂度^[3]。因此，探讨建系法在初中几何竞赛题中的应用，不仅有助于深化对数形结合思想的理解，也有助于为学生几何学习和竞赛训练提供一种更为稳定、可操作的思维路径。本文将以真实考题为例，论证建系法在竞赛场景下的实践价值。

2 建系法的基本思想与使用原则

建系法是解决平面几何问题的重要方法，其核心是在图形中建立适当的平面直角坐标系，把点、线、距离、面积等几何元素转化为坐标、方程和数量关系，通过代数运算解决几何问题。其本质是将“形”的关系转化为“数”的关系，体现了数形结合思想^[4]。与传统纯几何方法相比，建系法能减少对复杂辅助线构造和隐含图形关系发掘的依赖，使解题过程更加清晰、规范和稳定。

在初中几何竞赛题中，建系法一般包括几个基本步骤：先分析图形结构，找出关键点、关键线段及数量关系；再选取适当的坐标系，通常将特殊点设为原点，将重要线段放在坐标轴上，以简化点的坐标表示；然后依据题设条件确定有关点的坐标，并借助中点公式、距离公式、斜率关系或面积公式等建立代数关系；最后通过运算得到结果，并结合图形说明其几何意义^[5]。由此可见，建系法并非单纯的计算方法，而是图形分析与代数表达相结合的综合方法。

建系法的效果很大程度上取决于坐标系的选取是否合理。一般应遵循三项原则：一是简洁性原则，即尽量使关键点坐标简单，减少参数和计算量；二是适配性原则，即坐标轴设置要符合图形特征，如将边、对称轴或高所在直线放在坐标轴上，以便表达平行、垂直、中点、对称等关系；三是高效性原则，即所建坐标系应服务于问题求解，避免虽然可以建系却导致运算繁琐。

从适用范围看，建系法尤其适用于规则图形较多、特殊点明显，以及与长度、面积、比例和位置关系密切相关的问题，如正方形、矩形、等边三角形中的中点、交点和对称点问题。但建系法并非万能，若题目本身角度关系清晰、纯几何结构突出，直接采用传统几何方法可能更简洁。因此，在实际解题中，应根据题目特征灵活判断，合理选择方法。总之，建系法不仅是一种解题技巧，更是一种重要的数学思想方法，对于提高学生解决初中几何竞赛题的能力具有积极意义。

3 建系法在典型竞赛题中的应用分析

(1) (2013年浙江省竞赛题) 如图1，正方形 $ABCD$ 和正方形 $CGEF$ 的边长分别为2和3，且点 B ， C ， G 在同一直线上， M 是线段 AE 的中点，链接 MF ，求 MF 的长。

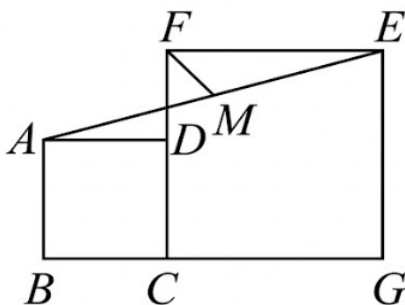


图1

1) 思路分析

这道题表面上属于长度计算问题,但如果采用纯几何方法,关键难点在于如何有效利用“中点”这一条件。若从传统几何角度入手,通常需要通过辅助线构造、全等或相似关系来寻找所求线段与已知边长之间的联系。这种方法在理论上可行,但思路并不直观,对图形结构的把握要求较高。

若采用建系法,则问题会变得清晰得多。由于题目中包含正方形结构,中点条件又十分适合坐标表达,因此可以在平面内建立适当的直角坐标系,将一个顶点设为原点,把一条边放在坐标轴上。这样,各顶点坐标便可直接由边长确定,再利用中点公式求出中点坐标,最后用两点间距离公式即可求得目标线段的长度。

首先,在平面内建立适当的直角坐标系,使各顶点坐标尽量简单,再由边长确定 A, F, E 等点的坐标;然后利用中点公式求出线段 AE 的中点 M 的坐标;最后用两点间距离公式,代入点 M 和 F 的坐标,计算出线段 MF 的长度。

2) 解析如图 2, 建立所示坐标系, 则 $A(-2,2), F(0,3), E(3,3)$, 则中点 M 的坐标为

$$\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \text{ 所以 } MF = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{5}{2}-3\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

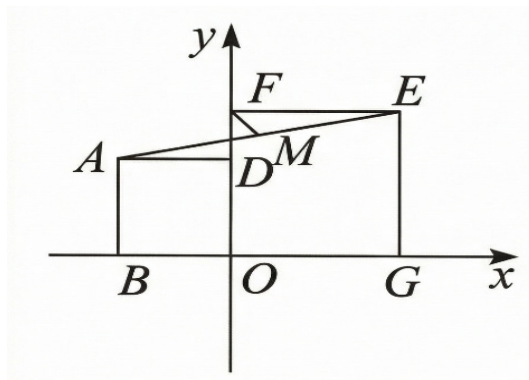


图 2

3) 评析

本题最能体现建系法的一个典型优势,即中点关系的坐标化处理。在纯几何解法中,“中点”往往意味着需要寻找对应线段、构造中位线或借助对称关系,而这些都需要较强的图形观察能力。而在坐标系中,中点是一个可以直接通过公式表示的对象,关系清晰、步骤明确。

此外,本题中两个正方形的边长已知,且图形具有规则结构,坐标的设定较为自然。也就是说,这道题非常适合通过建系将图形关系“落地”为代数关系。对学生而言,这样的处理方式不仅降低了解题门槛,也有助于培养其把几何条件转化为数量关系的能力。可以说,在这类“规则图形+中点条件+长度计算”的题目中,建系法具有明显优势。

(2) (2016 年美国数学竞赛题) 分别以正方形 $ABCD$ 各边为边, 向正方形外作正三角形, E, F, G, H 分别为正三角形的中心, 则正方形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 面积的比值为 ()。

- A.1 B. $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{2}$ E. $\sqrt{3}$

1) 思路分析

这道题的难点在于图形较为复杂。题目中既有正方形,又有四个外接正三角形,还涉及到这些正三角形中心所构成的新图形。如果采用纯几何方法,通常需要综合使用正三角形中心性质、旋转、对称、特殊角关系等工具,并进一步判断新图形的形状及边长关系,整体难度较大。

建系法在这里的优势十分突出。由于原图形是正方形，可以自然地建立平面直角坐标系，并把正方形四个顶点设为简单坐标。然后根据正三角形的结构确定其第三个顶点，再求出每个正三角形中心的坐标。接下来，只需通过坐标或向量方法判断这些中心点所构成图形的性质，并进一步求出其边长与面积，最后与原正方形面积进行比较即可。

先以正方形 $ABCD$ 为边长 2 建立直角坐标系，给四个顶点赋坐标，再按题目要求写出各外接正三角形第三个顶点的坐标，由三点取平均得到四个中心点 E, F, G, H 的坐标；随后利用向量计算相邻边的长度与点积，判定 $EFGH$ 为正方形并求出其边长，最后与原正方形面积比较，得到面积比。

2) 解析

如图 3，建立平面直角坐标系，设 $A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1), D(1,-1)$ ，则 $E\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ ，

$$F\left(0, 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \text{ 故 } \frac{S_{\text{正方形}EFGH}}{S_{\text{正方形}ABCD}} = \left[\frac{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\sqrt{2}}{2} \right]^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

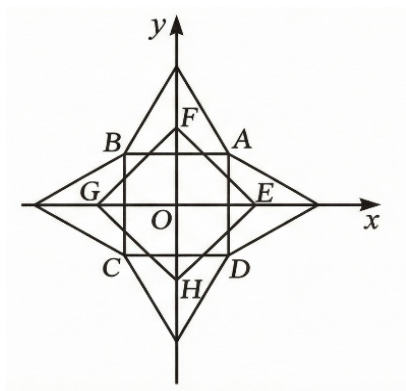


图 3

3) 评析

本题通过建立平面直角坐标系，将平面几何问题代数化与坐标化，使解题步骤更清晰、计算更简洁；而传统几何法则需依赖对图形结构的洞察与复杂辅助线的构造，尤其在计算边长时难度较大、出错点多，因而整体上建系法在限时考试中更具优势。

(3) (2017 年美国数学邀请赛试题) 如图 4，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 84$ ， $AD = 42$ ，点 M 是边 AD 的中点，点 N 是边 AB 的三等分点（靠近顶点 A ），线段 CM ， DN 相较于点 O ，点 P 在四边形 $BCON$ 的边界上，线段 BP 平分四边形 $BCON$ 的面积，求 $\triangle CDP$ 的面积。

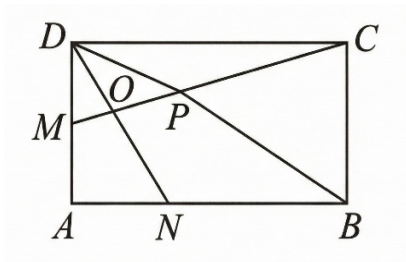


图 4

1) 思路分析

这道题属于面积问题。面积类竞赛题在纯几何方法中往往需要通过辅助线分割、等积变换、比例转化等手段来处理，思路灵活但不易把握。特别是当题目加入“某线段平分某四边形面积”这样的条件时，若只从图形入手，往往需要反复拆分、比较和追踪多个小区域的面积关系，难度较大。

从建系法角度看，这类题反而很适合转化。因为矩形本身结构规则，顶点坐标极易设定；中点和三等分点的坐标也可以直接表示；交点坐标可通过联立直线方程求出；而“面积平分”这一条件则可以转化为代数方程。这样，题目的核心任务就从复杂的面积追踪，转变为有条理的坐标计算与方程求解。

首先，在矩形中建立直角坐标系，得出顶点坐标，列出直线 CM ， DN 的方程并求交点 O 。然后用坐标法求出四边形 $BCON$ 的面积，设出点 P ，用“ BP 平分面积”的条件列方程确定 P 的坐标。最后，用点 C ， D ， P 的坐标求出 $\triangle CDP$ 的面积。

2) 解析

建立如图 5 的直角坐标系，则 $N(28,0)$ ， $D(0,42)$ ，直线 DN 的解析式为 $y = -\frac{3}{2}x + 42$ ； $M(0,21)$ ， $C(84,42)$ ，直线 CM 的解析式为 $y = \frac{1}{4}x + 21$ ，联立得 $O(12,24)$ 。 $\therefore S_{\text{四边形}BCON} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle ONB} = 2184$ ，
 设 $P(x,y)$ ，则 $S_{\triangle BPC} = \frac{(84-x) \times 42}{2} = 1092$ ，解得 $x = 32$ ， $y = 29$ ，即 $P(32,29)$ ，
 $\therefore S_{\triangle CDP} = \frac{(42-29) \times 84}{2} = 546$ 。

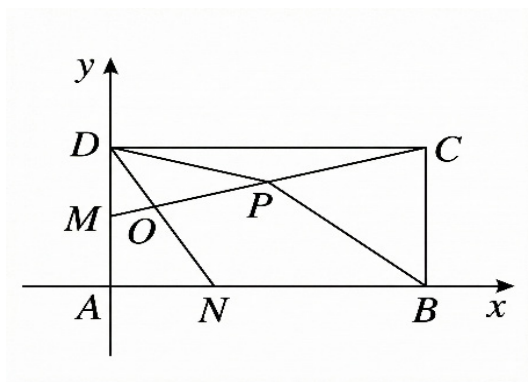


图 5

3) 评析

本题中，建系法先用坐标刻画各点位置，再用代数方程刻画交点关系，最后把面积问题转化成代数式来处理，得到所求三角形的面积。这样一来，本来要反复作辅助线、拆分和追踪面积的几何推理，被替换成一套有条理的代数运算过程，减轻了对图形直觉和构造技巧的依赖，使整个解题过程更加简洁，也更便于实际操作。

4 结语

综上所述，建系法作为一种将平面几何问题代数化、坐标化的解题方法，在初中几何竞赛题中具有较高的应用价值。它能够把原本依赖图形观察与辅助线构造的求解过程，转化为更清晰、更规范、更具操作性的代数运算过程，从而有效降低解题难度，提高思维的稳定性^[6]。通过本文所分析的三道例题可以看出，建系法在处理长度计算、图形判定、面积求解等问题时都表现出明显优势，尤其适用于结构规则、条件清晰、数量关系较突出的题目^[7]。它不仅有利于降低解题的技术门槛，也有助于学生更快抓住题目的本质结构，从而

形成规范、稳定的解题流程^[8]。因此,在几何教学中,教师应主动创设情境,引导学生用建系法分析典型问题,循序渐进地开展专题训练,不断提高学生运用建系法解决几何问题的熟练度和自信心。

总之,建系法不仅是一种解题技巧,更是一种体现数形结合思想的重要数学方法。通过合理训练,学生能够逐步形成从图形到数量、从直观到表达、从观察到推理的综合能力。这对于提升学生的几何素养、竞赛能力以及整体数学思维水平,均具有积极而深远的意义。

参考文献

- [1] 顾予恒,卢成娴.建系有法可依立几有章可循——向量建系法在立体几何问题中的应用[J].中学教研(数学),2022,(03):37-41.
- [2] 方海兵.妙用建系法解决几何问题[J].中学数学,2025,(24):51-52.
- [3] 李曦.巧用建系法,妙解几何题[J].数理天地(初中版),2025,(05):31-32.
- [4] 管善海.例析建系法在求解与圆有关的向量问题中的应用[J].福建中学数学,2023,(02):44-45.
- [5] 曾钰玲.浅谈初中数学利用建系法巧解几何题[J].数理化解题研究,2021,(20):2-3.
- [6] 林敏.浅析建系法求解立体几何题的点坐标求法[J].中学数学,2021,(21):64-65.
- [7] 杨奉利.多角度建系殊途同归[J].中学生数理化(高二数学),2024,(09):35-37.
- [8] 杨卫乾.利用建系法巧解向量题[J].考试周刊,2017,(79):72-73.

版权声明: ©2026 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS