

抓取隐圆：初中动点最值问题的一种有效解法

王金芳

扬州大学数学学院 江苏扬州

【摘要】动点最值问题是初中数学的高频难点，其核心障碍在于学生难以从动态图形中识别不变的几何关系。本文系统梳理了‘隐形圆’的三类基本模型：定点定长模型（动点到定点距离恒定，轨迹为圆）、定弦定角模型（动点对定线段所张角恒定，轨迹为圆弧）及四点共圆模型（对角互补或同底同侧等角）。结合三道典型例题，揭示了各自的关键构造方法——例 1 通过旋转构造全等三角形确定动点轨迹圆心；例 2 利用垂径定理和三角函数确定圆心位置与半径；例 3 通过全等三角形证得定角，再以四点共圆确定轨迹。在此基础上，提炼出“动中取定→定中找圆→圆中求最”的通用解题路径，并给出每步的操作要领。研究表明，该路径可使复杂的最值问题转化为定点到圆上动点的距离模型，大幅降低思维难度。教学上应借助几何画板等工具动态演示轨迹生成，帮助学生完成从“无圆”到“有圆”的认知跨越。

【关键词】隐形圆；动点最值；定点定长；定弦定角；四点共圆

【收稿日期】2026 年 8 月 3 日

【出刊日期】2026 年 9 月 1 日

【DOI】10.12208/j.sdr.20260068

Capturing the hidden circle: An effective solution to middle school moving point maximum/minimum problems

Jinfang Wang

School of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 Dynamic-point maximum/minimum problems constitute a frequent and difficult topic in junior high school mathematics. The core obstacle lies in students' difficulty in identifying invariant geometric relationships from dynamic figures. This paper systematically sorts out three basic models of the “invisible circle”: the fixed-point-and-fixed-length model (the moving point maintains a constant distance from a fixed point, with a circle as its locus), the fixed-chord-and-fixed-angle model (the moving point subtends a constant angle to a fixed line segment, with a circular arc as its locus), and the concyclic-four-point model (characterized by supplementary opposite angles or equal angles on the same side of a common base). Combined with three typical examples, this paper reveals the key construction methods for each model. In Example 1, rotation is adopted to construct congruent triangles to locate the center of the moving-point locus. In Example 2, the perpendicular-chord theorem and trigonometric functions are applied to determine the center position and radius. In Example 3, congruent triangles are used to prove a fixed angle, and concyclicity of four points is then employed to confirm the locus. On this basis, a general problem-solving procedure of “identifying invariants from motion→locating the implicit circle from invariants→solving maximum/minimum values via point-circle distance” is summarized, with operational guidelines provided for each step. The study shows that this procedure transforms complex maximum/minimum problems into the distance model between a fixed point and a moving point on a circle, which greatly reduces cognitive load. From a teaching perspective, dynamic demonstration of locus generation with tools such as GeoGebra is recommended to help students achieve the cognitive leap from “no explicit circle” to “recognizing the implicit circle”.

【Keywords】 Dynamic-point maximum/minimum value problems; Invisible circle; Fixed-point-and-fixed-length; Fixed chord and fixed angle; Concyclic-four-point

1 引言

在初中数学的各类测试中, 动点最值问题一向是区分度较高的题目类型。这类题目之所以难, 原因在于它同时考验学生的几何知识储备和动态思维能力。学生需要处理的不仅是一个静态图形, 还是一个在特定约束下连续变化的几何系统。在众多解法中, “隐形圆” 是最有威力也最不容易被学生自主发现的一种工具。

所谓“隐形圆”, 指的是这样一种情况: 题目的已知条件和图形中并未直接呈现圆, 但动点的运动轨迹本质上是一段圆弧或一个完整的圆。一旦将这个隐藏的圆揭示出来, 原本复杂的最值问题便转化为点到圆的距离问题, 解法的复杂度大幅下降^[1]。因此, 如何帮助学生在解题过程中有效地“抓取”隐圆, 成为教学中亟待解决的问题。

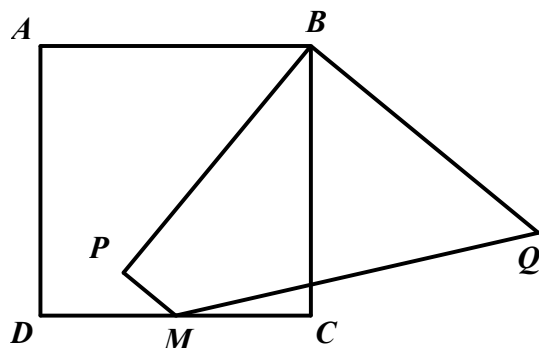


图 1

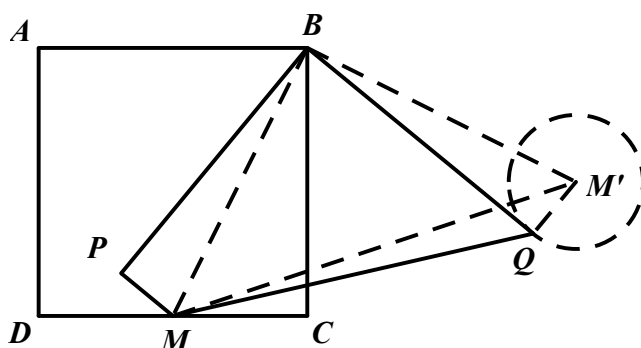


图 2

解析: 如图 2, 点 P 的运动轨迹是一个以 M 为圆心, 半径为 MP 的圆, 点 Q 是点 P 绕点 B 逆时针旋转 90° 得来的, 那么点 Q 必然跟点 P 一样, 轨迹是个圆。于是将点 M 绕点 B 逆时针旋转 90° , 得到 M' , 连接 BM' 、 QM' 。所以 $\angle PBM = 90^\circ - \angle MBQ = \angle QBM'$ 。又因为 $BP = BQ$ 、 $BM = BM'$, 所以 $\triangle BQM' \cong \triangle BPM$ (SAS), 所以 $M'Q = MP = 1$, 所以点 Q 的运动轨迹是以 M' 为圆心, $M'Q$ 为半径的圆上, 根据三角形三边关系, 故 $MQ \geq MM' - M'Q$, $MB = \sqrt{BC^2 + MC^2} = 2\sqrt{5}$, $MM' = \sqrt{MB^2 + M'B^2} = 2\sqrt{10}$, 所以 MQ 的最小值为 $2\sqrt{10} - 1$ 。

有些题目没有直接给出动点的轨迹, 需要学生通过三角形全等或旋转的性质先行推导。如本题中“将线段 BP 绕点 B 逆时针旋转 90° 得到线段 BQ”, 联想到 P 的轨迹是一个圆, 旋转后的轨迹也是一个

2 隐圆出现的基本条件

从几何角度看, 动点的轨迹是一个圆, 当且仅当动点在运动过程中始终满足某个与定点或定线段有关的等量关系。具体来说, 初中阶段最常见的隐圆生成方式有以下三种。

2.1 动点到定点的距离恒定

到定点的距离等于定长的点的集合, 这是圆的定义也是判别隐圆最直接的准则。因此, 当题中出现到一定点距离相等的一组线段时, 就有隐形圆存在, 此时, 构造以这个点为圆心的圆, 能实现问题的突破^[2]。

例 1: 如图 1, M 是正方形 ABCD 边 CD 的中点, P 是正方形内一点, 连接 BP, 将线段 BP 以点 B 为中心逆时针旋转 90° 得到线段 BQ, 连接 MQ。若 $AB = 4$, $MP = 1$, 则 MQ 的最小值为_____。

圆, 但是没有圆心, 所以把 M 点也逆时针旋转 90° 过去, 立即可以得出 $MP = M'Q$ 的结论, $M'Q$ 本身为定值, 则点 Q 的轨迹即为一个圆。

2.2 动点对定弦所张的角恒定

依据圆的性质, 固定的线段只要对应固定的角度, 那么这个角的顶点轨迹为圆的一部分, 据此可以发现“隐形圆”^[3]。当一条线段 AB 固定, 而动点 P 在运动过程中始终保持 $\angle APB$ 为一个定角 α 时, 点 P 的轨迹是以 AB 为弦的圆弧。当 $\alpha = 90^\circ$ 时为特殊情形, 轨迹变为以 AB 为直径的圆。

例 2: 如图 3, 在矩形 ABCD 中, $AD = 5$, $AB = 3\sqrt{3}$, 点 E 在 AB 上, $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}$, 在矩形内找一点 P, 使得 $\angle BPE = 60^\circ$, 则线段 PD 的最小值为_____。

解析: 如图 4, 因为 $AB = 3\sqrt{3}$, $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}$, 所以 $BE = 2\sqrt{3}$ 。因为 $\angle BPE = 60^\circ$ 恒定, 根据圆周角定理的逆定理, 点

P 在以 BE 为弦的圆上运动，记圆心为点 O，连接 OE、OB，则 BE 所对的圆心角 $\angle EOB = 2\angle BPE = 120^\circ$ （取劣弧对应情形，圆心在矩形内部一侧）。作 BE 的垂直平分线，交 BE 于 M，则 $\angle EOM = \angle BOM = 60^\circ$ ，且 $EM = \frac{1}{2}BE = \sqrt{3}$ ，则 $EO = \frac{EM}{\sin \angle EOM} = 2$ ，所以该圆的半

径为 2，于是根据三角形三边关系， $DP \geq OD - OP$ ，分别过点 O 作 $ON \perp AD$ ， $OM \perp BE$ ，所以 $OM = NA$ ， $ON = AM = 2\sqrt{3}$ ， $OM = \frac{EM}{\tan \angle EOM} = 1$ ，所以 $DN = AD - AN = 4$ ，所以 $DO = \sqrt{ON^2 + DN^2} = 2\sqrt{7}$ ，所以 DP 的最小值为 $2\sqrt{7} - 2$ 。

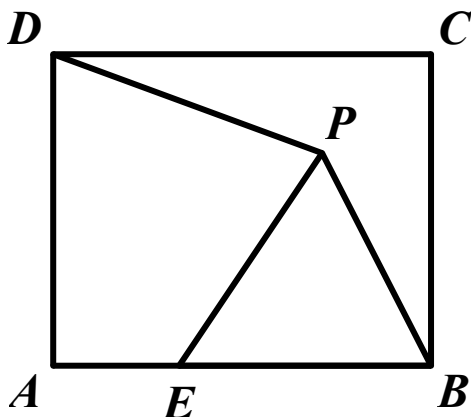


图 3

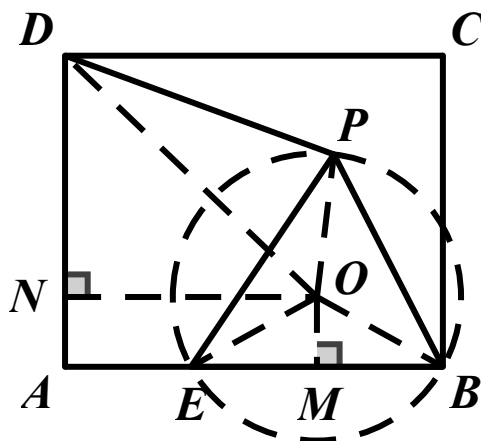


图 4

定边对定角这一类型在考试中出现频率较高。直角情形的辨识相对容易——题目中若出现“垂直”“高线”“直径所对圆周角”等提示，便应立刻联想到隐圆。非直角定角则需要结合圆周角定理进行逆向推理：圆周上同弧所对的圆周角相等，因此若某动点对定线段所张的角恒等于已知角，则该点必在定线段为弦的圆上。

2.3 四点共圆条件的满足

四点共圆是隐圆问题的另一重要来源。当四个点满足“对角互补”或“同底同侧等角”的条件时，这四个点便在同一圆上^[4]。

例 3：如图 5， $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 都是等边三角形， $\triangle ABC$ 的边长是 5， $\triangle DCE$ 的边长是 3，已知直线 BD 与直线 AE 相交于点 F。现将 $\triangle DCE$ 绕着点 C 旋转一周，则在这个旋转的过程中，线段 AF 长度的最小值是_____。

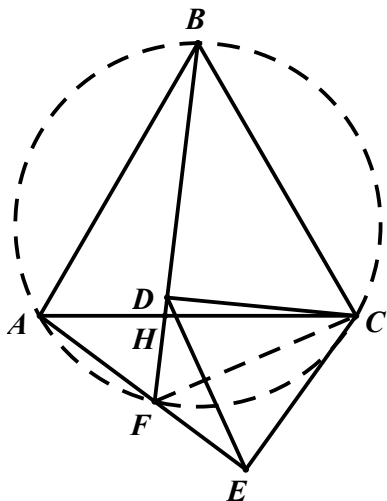


图 5

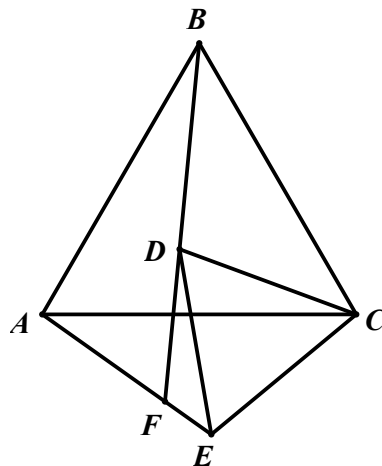


图 6

解析: 如图 6, 因为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 都是等边三角形, 并且 $\triangle DCE$ 绕着点 C 旋转, 所以容易证明 $\triangle BDC \cong \triangle AEC$ (SAS), 所以 $\angle CBD = \angle CAE$, 记 AC 与 BF 交于点 H , 所以 $\angle AHF = \angle BHC$, 于是 $\angle AFB = 180^\circ - \angle CAE - \angle AHF = 180^\circ - \angle CBD - \angle BHC = \angle ACB = 60^\circ$, 故 A, F, C, B 四点共圆。 AF 是 $\angle ABF$ 所对的弦, 为了使 AF 最小, 于是 $\angle ABF$ 就最小, 而 $\angle ABF = \angle ABC - \angle CBF$, 于是 $\angle CBF$ 最大时 AF 最小, 当 $CD \perp BF$ 时, $\angle CBF$ 最大, 此时 $\angle AEC = 90^\circ$, 所以 $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = 4$, 连接 CF , 易证 $\triangle FDC \cong \triangle FCE$, 所以 $\angle FCE = \angle FCD = \frac{1}{2} \angle DCE = 30^\circ$, 所以 $EF = \tan \angle FCE \cdot CE = \sqrt{3}$, 所以 $AF = AE - EF = 4 - \sqrt{3}$ 。

这种情形在四边形、矩形、正方形、等边三角形背景的题目中较为多见。将四点共圆关系确定之后, 原本分散的线段和角度关系可以集中到圆中处理, 许多看似复杂的最值问题由此获得简明的解法^[5]。

3 解题策略: 三步破隐圆

综合上述分析, 解决隐形圆动点最值问题可遵循以下三步策略:

第一步: 动中取定——观察动点在运动过程中哪些几何元素保持不变。是某条线段的长度不变? 还是某个角的大小不变? 或是对边始终存在某种位置关系? 这一步的核心是“去伪存真”, 在运动变化中捕捉不变的几何关系。

第二步: 定中找圆——根据第一步发现的不变量, 判断对应的隐圆模型: 定点定长作圆; 定长对定角; 四点共圆。构建模型需要学生熟练地掌握圆的性质定理等基础知识, 形成能利用已有知识解决实际问题的能力^[6]。

第三步: 圆中求最——将问题转化为定点到圆(或圆弧)上动点的距离最值模型, 定点可位于圆内、圆外或圆周上。模型是解题工具, 轨迹是转化桥梁; 而依托转化与化归思想, 对复杂问题进行拆解、重构, 才是求解此类问题的核心思想^[7]。

4 结语

隐圆方法是解决初中动点最值问题的一条有效途径。其本质并不复杂: 在运动变化中找到不变的

数量关系或位置关系, 据此确定动点的轨迹, 再借助圆的基本性质完成最值的求解。学生在掌握这一方法的过程中, 收获的不仅是一类题目的解法, 更是一种“在变化中寻找规律”的数学思维方式。

从教学角度而言, 隐圆内容的讲授不宜只停留在“套模型”的层面, 而应帮助学生理解每一种隐圆类型背后的几何原理。只有把道理讲透, 学生才能在面对新的题目情境时, 独立完成从“无圆”到“有圆”的跨越。与此同时, 教师在教学时可以借助几何绘图软件, 将动点的轨迹标记出来, 辅助学生感知轨迹生成过程^[8]。

参考文献

- [1] 沈迎华. 发现“隐形”圆巧求最小值[J]. 初中数学教与学, 2017, (15): 14-16.
- [2] 卢新, 廖远强. “三法”发现隐形圆[J]. 中学数学, 2025, (12): 61-62.
- [3] 左晓勇. 揭秘“隐形圆”的四种模型[J]. 数理天地(初中版), 2025, (11): 20-21.
- [4] 吴天魁. 显圆有形隐圆有法——九类动点最值问题解法体系与教学实践[J]. 数学通讯, 2026, (11): 54-57.
- [5] 马婷婷. 构建“四点共圆”模型求最值的典例精讲[J]. 数理天地(初中版), 2025, (2): 45-46.
- [6] 胥建军, 岳绍杰. 构建模型求解动点下的最值问题[J]. 中学数学教学参考, 2025, (9): 55-56.
- [7] 汤中坚. 初中数学动点问题解题策略探究[J]. 数理天地(初中版), 2026, (7): 43-44.
- [8] 林伟隆, 李鹏. GeoGebra 在解题教学中的应用研究——以中考数学动点问题为例[J]. 数学之友, 2026, (13): 67-69.

版权声明: ©2026 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS