理想流体伯努利方程的协变性初探

李学生

山东省济南市长清第一中学　山东济南

【摘要】理想流体的伯努利方程是理想流体机械能守恒定律的体现，但是伯努利方程的协变性在力学教学界没有取得共识，也是流体力学中的一朵乌云。相对性原理不是一个物理理论，而是对于物理理论的一个要求，违背相对性原理的理论都是错误的，为此笔者先从矢量力学角度利用动能定理和机械能守恒定律推导了伯努利方程，然后证明了惯性力都是保守力，接着从分析力学角度分析了伯努利方程，最后得出伯努利方程具有伽利略变换的不变性，验证了机械能守恒定律对于所有参照系都协变，满足相对性原理的要求。

【关键词】伯努利方程；伽利略变换的不变性；动能定理；机械能守恒定律；分析力学

【收稿日期】2025 年 9 月 19 日　　**【出刊日期】**2025 年 10 月 28 日　　**【DOI】**10.12208/j.sdr.20250237

A preliminary study on the covariance of the Bernoulli equation for ideal fluids

Xuesheng Li

NO.1 Middle School of Changqing, Jinan, Shandong

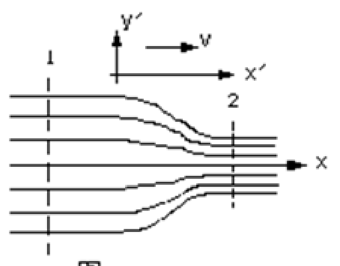
【Abstract】 The Bernoulli's equation for ideal fluids is the embodiment of the law of conservation of mechanical energy for ideal fluids. However, there is no consensus in the mechanics teaching community regarding the covariance of the Bernoulli equation, which also stands as a "dark cloud" in fluid mechanics. The principle of relativity is not a physical theory itself, but a requirement for physical theories—any theory that violates the principle of relativity is erroneous. To address this, the author first derived the Bernoulli equation from the perspective of vector mechanics using the work-energy theorem and the law of conservation of mechanical energy. Subsequently, it was proven that all inertial forces are conservative forces. Then, the Bernoulli equation was analyzed from the standpoint of analytical mechanics. Finally, it was concluded that the Bernoulli equation is invariant under Galilean transformations, verifying that the law of conservation of mechanical energy is covariant across all reference frames and thus meets the requirements of the principle of relativity.

【Keywords】 Bernoulli equation; Invariance under Galilean transformation; Kinetic energy theorem; Law of conservation of mechanical energy; Analytical mechanics

D．伯努利（Daniel Bernoulli，1700-1782）的流体运动方程实际上就是流体运动中的机械能守恒定律，1726 年伯努利通过无数次实验发现了“边界层表面效应”：流体速度加快时，物体与流体接触的界面上的压力会减小，反之压力会增加。为纪念这位科学家的贡献，这一发现被称为“伯努利效应”。伯努利效应适用于包括气体在内的一切流体，是流体作稳定流动时的基本现象之一，反映出流体的压强与流速的关系。丹尼尔在气体动力学方面的贡献，主要是用气体分子运动论解释了气体对容器壁的压力的由来。他认为，由于大量气体分子的高速规则运动造成了对器壁的压力，压缩气体产生较大的作用力是由于气体分子数增多，并且相互碰撞更加频繁所致。丹尼尔将级数理论运用于有关力学方面的研究之中，这对于力学发展具有重要的意义。

伯努利方程是能量方程式，说明在管内作稳定流动的理想液体具有压力能、重力势能和动能三种形式的能量，在适合限定条件的情况下，流场中的三种能量都可以相互转换，但其总和保持不变，这三种能量统称为机械能。由于理想流体压力是保守力[1]，因此压力能也可以称为压力势能。假设地球质量充分大，从而稳定地保持为惯性系，此时一个保

守力的功等于质点势能的减少[2]。



图a

1 伯努利方程、连续性方程协变性疑难

如图 a，理想不可压缩流体沿水平管道 x 方向稳定流动。设在位置 1 处流速为 v_1，管横截面积 S_1，压强为 P_1；在位置 2 处流速为 v_2，横截面积为 S_2，压强为 P_2，流体密度为ρ。在相对于管道静止的 x 系中，伯努利方程为：

$$P_1+\rho v_1^2/2=P_2+\rho v_2^2/2 \qquad (1)$$

又有连续性方程：

$$v_1S_1=v_2S_2 \qquad (2)$$

现设想有一个相对管道以速度 **u**（远小于光速）沿管道匀速直线运动的惯性系 x'，在 x'系中流体的运动又如何呢？根据伽利略变换：$x'=x-vt$，$y'=y$，$z'=z$，$t'=t$，可得：$v_X'=v_X-u$，$v_Y'=v_Y$，$v_Z'=v_Z$，即 $\mathbf{v}'=\mathbf{v}-\mathbf{u}$。

由于力 F 和面积 S 都是伽利略变换的不变量，因此压强 P 不随坐标系改变，另有ρ不随坐标系改变，于是（1）式变换为：

$$P_1+\rho(v_1'+u)^2/2=P_2+\rho(v_2'+u)^2/2$$

或 $P_1+\rho v_1'^2/2=P_2+\rho v_2'^2/2+\rho u(v_2'-v_1')$ （3）

显然，$P_1+\rho v_1'^2/2\neq P_2+\rho v_2'^2/2$，即在 x'系中形如（1）式的伯努利方程失效了，（1）式实质上就是流体运动中机械能守恒的关系，流体可视为保守场；（1）式不协变说明在不同坐标系中功能关系的形式有所不同。

考察连续性方程：将变换关系代入（2）式得：

$$(v_1'+u)S_1=(v_2'+u)S_2$$

即 $v_1'S_1\neq v_2'S_2$，连续性方程也失效了，一个无源场在坐标变换中可成为有源的场。

物理定律如果在不同坐标系下都有相同形式，就称为“协变”，而“广义协变性”要求在任意可微坐标变换下，方程形式保持不变。也就是说，物理方程不依赖于我们如何标记坐标，而只与时空本身有关。

2 伯努利方程协变性疑难剖析

相对性原理是一个先验的理论，无法被证明也无法被证伪。是一个基于人类认知并符合人类思维模式的理论，是人类选择采用了相对性原理来评判理论或定律的客观与否，正确与否。相对性原理甚至超越了物理的范畴，是一个哲学理论。如果说物理是自然哲学的数学原理，那么相对性原理就是自然哲学，并不涉及数学原理，它无法用数学证明或证伪。相对性原理是一个基础的底层的理论，是一个对科学理论的要求。因为一个理论或者定律是否正确是要由相对性原理来评判。相对性原理的评判功能：是一个具有评判功能的框架性理论。所有放入该框架的理论、定律，如果符合相对性原理，则可以被判定为可能是客观的真实的，否则将会被判定为主观的、非真实的。它的评判功能体现了所有参考系（观者）对于客观规律认知的平等性，即客观规律不以观察者的不同而改变。相对性原理不仅能够评判定理定律，而且能够评判事件的真实性（评判事件是真实事件还是观测事件）；相对性原理的观察者不仅仅只是空间位置上不同的观察者，而且可以在时间坐标上不同。

伯努利方程是能量守恒定律在机械能领域的表现形式，应该满足协变性要求，下面利用动能定理和机械能守恒定律重新推导一下伯努利方程。

2.1 对于地面系观察者

设在右图的细管中有理想流体在流动，且流动方向从左向右，我们在管的 a_1 处和 a_2 处用横截面截出一段流体，即 a_1 处和 a_2 处之间的流体，作为研究对象。设 a_1 处的横截面积为 S_1，流速为 v_1，高度为 h_1；a_2 处的横截面积为 S_2，流速为 v_2，高度为 h_2。

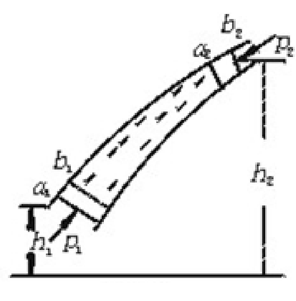


图 b

如图 b 所示，经过很短的时间Δt，这段流体的左端 S_1 由 a_1 移到 b_1，右端 S_2 由 a_2 移到 b_2，两端移动的距离为 Δl_1 和 Δl_2，左端流入的流体体积为 $\Delta V_1=S_1\Delta l_1$，右端流出的体积为 $\Delta V_2=S_2\Delta l_2$。

$$\therefore \Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

左端的力对流体做的功为：

$$\because W_1 = F_1 \Delta l_1,\ F_1 = p_1 \cdot S_1 = p$$

$$\therefore W_1 = p_1 S_1 \Delta l_1 = p_1 \Delta V$$

作用于右端的力 $F_2 = p_2 S_2$，它对流体做负功（因为右边对这段流体的作用力向左，而这段流体的位移向右），所做的功为：

$$W_2 = -F_2 \Delta l_2 = -p_2 S_2 \Delta l_2 = -p_2 \Delta V$$

∴两侧外力对研究液体所做的功为：

$$W = W_1 + W_2 = (p_1 - p_2) \Delta V$$

重力做功 $W_g = \rho g (h_1 - h_2) \Delta V$

根据动能定理得

$$W + W_g = (p_1 - p_2) \Delta V + \rho g (h_1 - h_2) \Delta V = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

整理后得：$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$

又 a_1 和 a_2 是在流体中任取的，所以上式可表述为：$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h$ ＝恒量，式中的三项都具有压强的量纲。其中 $\frac{1}{2}\rho v_2$ 相与流速有关，常称为动压强；ρgh 是由于流体自身所在高度（相对零势面）所产生的压强，p 项与流速无关，常称为静压强。当流体水平流动时，或者高度的影响不显著时，伯努利方程可表达为 $p + \frac{1}{2}\rho v^2$ ＝常量。

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = A = const \qquad (4)$$

把上式两边同除以密度 ρ，便可得到如下的方程：

$$p/\rho + \frac{1}{2} v_2 + gh = B = const \qquad (5)$$

方程（5）可从能量的角度来理解，其物理意义是描述了单位质量流体的压力势能、动能和重力势能三者之和在同一流线上为一恒量，即说明同一流线上流体的能量守恒。该方程中：p/ρ 表示流场中某一点上单位质量流体所具有的压力势能（弹性势能），从能量的角度讨论 p/ρ 项也可理解为单位质量流体相对于 $p = _0$ 状态所蕴含的能量。

经典伯努利方程适用范围：

①定常流：在流动系统中，流体在任何一点之性质不随时间改变；

②不可压缩流：只有流体不能被压缩，压力做的功才不会转化为流体的内能，流体机械能才可能守恒，密度为常数，在流体为气体适用于马赫数（M）<0.3；

③无摩擦流：摩擦效应可忽略，忽略黏滞性效应；

④静止惯性参照系，一般指地面系；

⑤同一条流线。流速和压强的比较必须在同一流线上，因为流线不同，流体的机械能可能不同。否则容易出错，例如所谓“车窗悖论”，指的是在行驶的汽车中，打开窗户，气流究竟是流进还是流出车窗。之所以称之为“悖论”，是因为根据流速与压强关系，选择不同参照物会得出不同的结果。以车为参照物，车外空气流速大压强小，空气应该流出车窗；以地面为参照物，车内空气流速大压强小，空气应该流入车窗。

流体沿着流线流动：流体元素沿着流线而流动，流线间彼此是不相交的。此公式是选择理想流体中的细流管推导得出的，当令截面积趋于 0 时，细流管演变为流线，因此可适用于同一流线上。

把上式两边同除以 ρg，便可得到如下的方程：

$$p/\rho g + \frac{1}{2} v_2/g + h = const \qquad (6)$$

该方程表示流场中一点上单位重量流体所具有的总机械能，在水力学中广泛应用，第一项表示流场中一点上单位重量流体所具有的压力潜能称为压力头，也就是压力对单位体积重量所做的功，第二项单位重量流体所具有的动能称为流速头，第三项就是流场中该点的高度称为位置头，也称水头，因此该方程说明了同一流线上各点的压力头、流速头和位置头三者之和为一恒量。从上面的方程可以看出，对于静止流体同一高度压强相同，验证了帕斯卡定律。公式中每一项都具有长度的量纲，所以 $p/\rho g$ 表示所考察的压力潜能的同时也可表示它能将流体压升到某以高度的能力。

2.2 对于小车系观察者

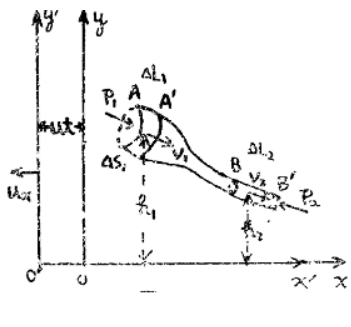


图 c

2.2.1 公式推导

先从矢量力学的角度分析，如图 c 所示，设 xoy 与 x′o′y′坐标系对应平行，且 x′o′y′系相对于固有参照系（地面系）xoy 以恒定速度 u 沿 x 轴的负方向运动，即 u=—ux，uy=0，uz=0。对于 x′o′y′系，在稳定流动的理想流体中截取的细流管，由 AB 位置流到 A′B′位置的过程中，重力不做功，压力做的功等于：

$$\Delta W = W_1 - W_2 = p_1 \Delta s_1 (\Delta L_1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_1}{v_1} t) - p_2 \Delta s_2 (\Delta L_2 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_2}{v_2} t)$$

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_2 - E_1 \\ &= (E_{BB'} + E_{BA'}) - (E_{AA'} + E_{BA'}) \\ &= E_{BB'} - E_{AA'} \\ &= (\frac{1}{2} m v_2^2 + mgh_2) - (\frac{1}{2} m v_1^2 + mgh_1) \\ &= (\frac{1}{2}\rho \Delta L_2 \Delta s_2 v_2^2 + \rho \Delta L_2 \Delta s_2 g h_2) - (\frac{1}{2}\rho \Delta L_1 \Delta s_1 v_1^2 + \rho \Delta L_1 \Delta s_1 g h_1)\end{aligned}$$

由于流体是连续的，所以有 $\Delta L_2 \Delta s_2 = \Delta L_1 \Delta s_1$

所以

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p\frac{u \bullet vt}{v\Delta L} = A + \frac{1}{2} m u^2 - mu.v_0 = \text{const}\ [2] \quad (7)$$

假设这段流体在静止惯性系中的位移为 r，在运动惯性系中的位移为 R。由于 R=r+ut=r（t）+ut=φ（t）是关于时间 t 的连续函数，这段流体在任何时刻的速度都是唯一存在的，因此 R=φ（t）是可导函数，如果该函数出现常值函数区间，这段流体静止，受到的力是 0，不是显含时间的力，下面不研究这个区间，去掉该常值函数区间，该函数的极值点可以把它划分为若干个单调区间，设 D 是该函数的任意一个单调区间，根据反函数的定义在该区间上存在反函数 t=φ^{-1}（R）。因此公式（7）变为：

$$\begin{aligned}& p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p\frac{u \bullet v\varphi^{-1}(R)}{v\Delta L} \\ &= p(1+\frac{u \bullet v\varphi^{-1}(R)}{v\Delta L}) + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h\ [2] \quad (8) \\ &= A + \frac{1}{2}\rho u^2 - \rho u.v_0 = \text{const}\end{aligned}$$

上式为运动参考系伯努利方程的一般形式，当 u=0 时，两坐标系重合，（8）式便退化为（4）式，符合对应原理的要求，经典伯努利方程为（8）式特例，（8）式适用于所有的惯性系——满足力学相对性原理，这样就不会出现文献[3]中的佯谬，定常流经过坐标变换后仍然是定常流。玻尔兹曼的格言:“形式是否优美的问题应该留给裁缝和鞋匠去考虑”。对于非定常流的问题需要利用柯西-拉格朗日方程研究。朗道在《理论物理学教程（第一卷）力学（第五版）》第五页指出：力学运动方程在伽利略变换下具有不变性。第 13 页指出：能量守恒定律不仅对于封闭系统成立，对位于定常外场（即不显含时间）的系统也成立。能量守恒的系统也称为保守系统。

2.2.2 公式的剖析

式中的四项都具有压强的量纲，其中$\frac{1}{2}$ρ v^2 相与流速有关，常称为动压强；ρ gh 是由于流体自身所在高度（相对零势面）所产生的压强，p 项与流速无关，常称为静压强，$p\frac{u \bullet v\phi^{-1}(R)}{v\Delta L}$ 为侧压强。当流体水平流动时，或者高度的影响不显著时，伯努利方程可表达为$\frac{1}{2}\rho v^2 + p$（$1+\frac{u \bullet v\phi^{-1}(R)}{v\Delta L}$）＝const。如果此时管的粗细相同，侧压力这一项也没有了，变为 p+$\frac{1}{2}\rho v^2$＝const。

把（8）式两边同除以密度ρ，便可得到如下的方程：

$$p/\rho + \frac{1}{2}v_2 + gh + \frac{p}{\rho}\frac{u \bullet v\phi^{-1}(R)}{v\Delta L} = B + \frac{1}{2}\rho u^2 - \rho u.v_0 = \text{const} \quad (9)$$

方程（9）可从能量的角度来理解，其物理意义是描述了单位质量的流体的压力势能（p/ρ + $\frac{p}{\rho}\frac{u \bullet v\phi^{-1}(R)}{v\Delta L}$）、动能（$\frac{1}{2}$v2）和重力势能（gh）三者之和在同一流线上为一恒量，即说明同一流线上流体的能量守恒。与静止惯性系比较，压力势能增加了一项$\frac{p}{\rho}\frac{u \bullet v\phi^{-1}(R)}{v\Delta L}$，原因在于动惯性系侧压力做功，出现了一项侧压力势能，流体内压力的功也发生了变化，正压力势能也发生了变化，$\frac{p}{\rho}\frac{u \bullet v\phi^{-1}(R)}{v\Delta L}$不仅仅是侧压力势能，在静止系由于侧压力不做功，侧压力势能不变，不用考虑。（9）式进一步验证了机械能守恒定律满足力学相对性原理，对于同一个物理过程，如果在一个惯性系机械能（动能+重力势能+压力势能）守恒，在另一个惯性系机械能（动能+重力势能+压力势能）一定守恒。

3 非惯性系中的伯努利方程

对于非惯性系，公式中还有一个惯性势能，因

为所有的惯性力都是保守力。

文献[4]利用引力场与惯性力场的等效性证明了惯性力都是有势力、主动力。文献[5]分析了惯性力的性质，证明了惯性力是保守力，根据爱因斯坦的观点：惯性力等价于引力场，因此也是保守力。或者假设爱因斯坦的广义相对性原理成立，那么能量守恒定律在所有参照系成立，只要一个物理过程在惯性系能量守恒，在非惯性系也一定守恒，也可以证明惯性力是保守力。文献[6]说明对于惯性力是否是保守力，需要单独证明，下面给出一个数学证明，证明惯性力（牵连惯性力和科里奥利力）不是显含时间的力。

证明：假设质点在惯性系的加速度为 a_1，惯性加速度为 a_2，此时对于质点 $dv/dt= a_1+ a_2=a(t)$，所以质点的速度是时间 t 的函数 $v=f(t)$，$ds/dt=f(t)$，位移也是时间 t 的函数 $\boldsymbol{s=\phi(t)}$，是关于时间 t 的连续函数，质点在任何时刻的速度都是唯一存在的，因此 $s=\phi(t)$也是可导函数，如果该函数出现常值函数区间，质点静止，受到的力是 $_0$，不是显含时间的力，下面不研究这个区间，去掉该常值函数区间，该函数的极值点可以把它划分为若干个单调区间，设 D 是该函数的任意一个单调区间，根据反函数的定义在该区间上存在反函数 $t=\phi^{-1}(s)$，这样 $a=a(\phi^{-1}(s))$，惯性力 $F=ma(\phi^{-1}(s))$与时间 t 无关，不是显含时间的力，也不是耗散力，是一个保守力。只有力的大小是位移和时间的二元函数，并且时间 t 不能被消元的话，才是显含时间的力。文献[7]列举的实例也可以消去时间 t，不是显含时间的力。

文献[8]证明了惯性离心力也是一个保守力，给出了离心力势能公式 $E_p=\frac{I^2}{2mr^2}$ $I=m\theta r^2$，文献[9]证明了在匀速转动参照系中某位置的离心力势能的表达式为 $E_p=-\frac{1}{2}m\omega^2r^2$，r=0 时为势能零点。文献[10-13]证明了直线匀加速度参考坐标系和匀角速度定轴转动参考坐标系，其惯性力为保守力，对于直线非匀加速度参考坐标系和非匀角速度定轴转动参考坐标系，其惯性力显含时间为非保守力是错误的，此时是隐含时间的力，通过变换可以消去时间 t，此时惯性力也是保守力。文献[14]认为除了牵连惯性力是非保守力，其他惯性力是保守力，也是同样的错误。文献[15]证明了非匀角速度定轴转动参考坐标系机械能守恒定律也成立，即此时惯性力也是保守力。其实对于直线非匀加速度参考坐标系惯性力也是一个保守力，例如假设在一部变加速上升（加速度 a=a（t））的电梯内观察一个自由降落的质点，质点受到重力和一个惯性力，惯性力的大小是时间 t 的函数，如果惯性力是显含时间的力——非保守力，会观测到质点的机械能不守恒，能量来自哪里呢？文献[16-17]的错误类似，不再分析。文献[18]利用惯性力势能解决了一个问题。

由于惯性力都是保守力，因此对于同一个物理过程，只要在一个惯性系机械能守恒，那么在其他任何参照系机械能都守恒，满足爱因斯坦的广义相对性原理——物理规律对于参照系都相同。

文献[19]认为机械能的哈密顿量是位置坐标的函数，在进行该位置坐标上的坐标变换时总会携带时间，导致其哈密顿量对时间的偏导数不为 0，是完全错误的，通过上面的分析可以看出时间 t 完全可以消去，其哈密顿量对时间的偏导数始终为 0。

文献[20]认为："一个真实力在某参考系是保守力，在其他参考系中可能仍是保守力，也可能是非保守力。地面系中重力是保守力，在地面附近相对于地面系平动的惯性系和非惯性系中重力仍是保守力，但是在绕着水平固定轴旋转的非惯性系中却是非保守力。在参考系 S_1 中，一端固定的弹簧对另一端物体的弹性力是保守力，在相对 S_1 系运动的参考系 S_2 中，此弹性力为非保守力。"是完全错误的，主要是没有消去坐标变换后的时间 t。由于万有引力（惯性力）不可能显含时间，是一种稳定场，因此引力不存在引力磁场，有人类比电磁力存在电场和磁场，得出引力存在引力磁场的观点是完全错误的。普朗克曾说，"在科学史中，一个新概念从来都不会是一开头就以其完整的最后形式出现。"

修正后伯努利方程适用范围：

①定常流：在流动系统中，流体在任何一点之性质不随时间改变，此时流速是相对于管口的速度；

②不可压缩流：只有流体不能被压缩，压力做的功才不会转化为流体的内能，流体机械能才可能守恒，密度为常数，在流体为气体适用于马赫数（M）<0.3；

③无摩擦流：摩擦效应可忽略，忽略黏滞性效应；

④所有参照系；

⑤同一条流线。

4 流体力学欧拉公式的协变性

由于（9）非常复杂，应用不方便，此时可以利用欧拉公式，欧拉公式是流体力学一般公式，欧拉公式也具有伽利略变换的不变性。

“对称是美的化身”。李政道教授认为：“物理定律一定是对称的，失去的对称性应该到物理真空中去找”。这足以说明，对称性是物理学中广泛存在的一种美的属性。对称性既是爱因斯坦科学研究的一种方法论原则，又是他科学创造的一个美学思想。

在理想流体力学中动力学基本方程是欧拉方程：或

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+(\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{v}=\mathrm{G}-\frac{1}{\rho}\nabla P..................$$
$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla \mathrm{v}^2-\mathrm{v}\times(\nabla\times\mathrm{v})=\mathrm{G}-\frac{1}{\rho}\nabla P \qquad (10)$$

下面证明欧拉方程在惯性坐标系变换下的协变性：

在方程（10）中 G、ρ、P、t 是不变量，可直接变换为 G/、ρ/、P/、t/；v 变换为 v/+u。其中 u 是常矢，故：

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=\frac{\partial(\mathbf{v}'+\mathbf{u})}{\partial t}=\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'};$$
$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot\nabla(\mathbf{v}'+\mathbf{u})=(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot\nabla\mathbf{v}'$$

再考虑算符$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$的坐标变换，单位矢 i、j、k 都是不变量，可用 **i**/、**j**/、**k**/代入，y、z 用 y/、z/代入。但$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial(x-ut)}{\partial x}=(1-u\frac{\partial t}{\partial x})\frac{\partial}{\partial x'}$，

当算符▽所作用场量为压强 P 时，t 与 x 可认为是独立坐标，从而$\frac{\partial t}{\partial x}=0,\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'},\nabla P=\nabla' P'$

当算符▽作用于场量 v 时，t 与 x 是相关的，$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{dx}{dt}=v_x$，从而$\frac{\partial}{\partial x}=(1-\frac{u}{v_x})\frac{\partial}{\partial x'}$

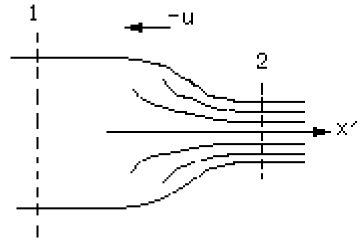
$$\therefore \nabla=(1-\frac{u}{v_x})\mathbf{i}'\frac{\partial}{\partial x'}+\mathbf{j}'\frac{\partial}{\partial y'}+\mathbf{k}'\frac{\partial}{\partial z'}=\nabla'-\frac{u\mathbf{i}'}{v_x}\frac{\partial}{\partial x'}=\nabla'-\frac{u}{v'_x+u}\mathbf{i}'\frac{\partial}{\partial x'}\cdot \qquad (11)$$

将（11）式代入

$$\mathbf{v}\cdot\nabla=(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot\nabla=(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot(\nabla'-\frac{u}{v'_x+u}\mathbf{i}'\frac{\partial}{\partial x'})=\mathbf{v}'\cdot\nabla'+\mathbf{u}\cdot\nabla'-(\mathbf{v}'+\mathbf{u})\cdot\frac{u\mathbf{i}}{v'_x+u}\frac{\partial}{\partial x'}$$
$$=\mathbf{v}'\cdot\nabla'+\mathbf{u}\cdot\nabla'-u\frac{\partial}{\partial x'}=\mathbf{v}'\cdot\nabla'$$

欧拉方程最终变换为：$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'}+(\mathbf{v}'\cdot\nabla')\mathbf{v}'=\mathbf{G}'-\frac{1}{\rho'}\nabla' P'$。可见欧拉方程在 x/系中的形式与在 x 系中形式完全相同。

欧拉方程在惯性坐标系变换下协变是意料中的，因为欧拉方程是牛顿运动定律在流体力学中的表达，而牛顿运动定律对伽利略变换是协变的，故对欧拉方程自然也协变。



图b

有关流体的一切定律，均可以从流体能量-动量张量获得：$T_{\mu\nu}=(\rho c^2+p)U_\mu U_\nu-pg_{\mu\nu}$（$g_{\mu\nu}$为时空度规，$U_\mu$为四维速度）。这个流体能量-动量张量具有洛伦兹协变性（因而在低速下，也具有伽利略协变性）。通常我们研究流体，总是愿意选择质心坐标系（如果是在宇宙学中，我们选择随动（共动）坐标系），这样就可以简化流体能量-动量张量。通常的伯努利方程，也属于这种简化的产物，它仅仅属于流体的质心坐标系。至于一般参考系中的伯努利方程，也可以从上面的流体能量-动量张量（$T_{\mu\nu}=(\rho c^2+p)U_\mu U_\nu-pg_{\mu\nu}$）获得，只要对它求协变散度即可。所以既然已经有了一般的流体能量-动量张量（$T_{\mu\nu}=(\rho c^2+p)U_\mu U_\nu-pg_{\mu\nu}$），那就等价于我们已经有了一般参考系中的伯努利方程。所以一般参考系中的伯努利方程，不再是一个很有必要研究的问题。相反要简化，有意研究特殊参考系中的（简化了的）伯努利方程，不想去研究一般参考系中的伯努利方程。

5 对以往文献的分析

从上面的推导可以得出，在稳定场中势能不可能显含时间，有些文献得出质点在稳定场（例如重力场、弹力场）中运动在某个惯性系势能测量可以显含时间是完全错误的[21]。

文献[22-23]得出与公式（8）相似的结论，但是该公式含有时间 t，不符合物理学方程的要求（因为能量守恒定律是时间均匀性的体现，不能含有时间 t），指出了经典伯努利方程仅仅适用于静止惯性系（通常指地球坐标系）。

文献[3]由于没有认识到这一点，提出因为力对各惯性系而言虽为不变量，但受力作用的质点的位

移却因参照系而异，从而功也参照系而异，因此对某一惯性系而言体系能量守恒，对另一个惯性系而言能量可以不守恒。这样机械能守恒定律就不满足力学相对性原理了，进而得出能量守恒定律也不满足力学相对性原理了。

6 分析力学的角度

分析力学作为经典力学形式化发展的终点，奠定了现代理论物理诸多领域的形式语言。（8）式虽然满足力学相对性原理，但是形式复杂，不符合科学简单化的原则，狄拉克认为：简单性属于美，简单性原则改为数学美原理。我们换一个角度考虑问题，在小车系侧压力虽然做功，但是不改变机械能，伯努利方程是关于流体的机械能方程，我们也可以按照分析力学的方法不管侧压力。

文献[24]利用侧壁压力在静止惯性系不做功从而在运动惯性系也不做功，得出伯努利方程在所有惯性系形式完全相同是错误，原因在流体流动中，流管侧管压力对流体微团所做的功只在特定惯性系（流体）在其中作定常流）中一般不等于 0，流体内的压力功也发生了变化。但是我们只要把这篇文献中的侧压力不做功，改为侧压力不改变机械能，也可以认为经典伯努利方程适用于所有的惯性系，只是此时 V=$p+\rho gh$ 是分析力学中的势能，T=$\frac{1}{2}\rho v^2$ 是分析力学中的动能，机械能 E=$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh$ 和矢量力学的计算结果相同。由于惯性力都是保守力，所以对于非惯性系 p+$\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh$ ＝const 也成立。

通过这个实例可以看出分析力学比矢量力学在应用方面具有更大的优势，对于运动惯性系可以从分析力学角度计算继续利用经典伯努利方程，因为此时还是处于平衡状态，对于非惯性系增加一个惯性力即可[24-33]，其动力学方程适用于各种力学系统（质点、质点系、刚体等），而且适用于惯性系和非惯性系，动力学方程的形式也不随广义坐标的选取而发生变化。

作用在流体体积元上的体积力大小一般与流体元体积成正比，故名体积力；体积力为穿越空间作用在所有流体元上的非接触力，例如重力、惯性力、电磁力等。重力和惯性力正比于流体元的质量，又称为质量力，质量力和体积力都是保守力。

把力学方程表为分析力学形式更具有普遍的意义，因为这样可以在一般广义坐标下研究力学系统的运动，因而对力学系统的性质可以作出普遍的推论。由于矢量力学的机械能守恒定律中的势能对应于所有的有势力，包括主动力和约束反力，约束反力也是保守力，因此矢量力学的机械能守恒定律势能包括约束反力势能，不能仅仅考虑主动力势能。由于矢量力学需要计算约束力的功，分析力学不需要计算约束力的功，因此分析力学中的动能和矢量力学计算的动能并不始终相等。如果约束力可以改变机械能的话，分析力学的方法就是错误的，以往杂志中发表的关于弹簧振子、斜面、单摆等问题中约束反力改变机械能的观点显然是完全错误的。

7 连续性方程是运动学方程，适用于所有坐标系

笔者认为连续性方程是运动学方程，适用于所有坐标系，连续性方程中的速度 v 不是相对于观察者的速度，而是流体与管道口的相对速度，与伯努利方程中速度的含义不一样。证明如下——质量守恒定律告诉我们，同一流体的质量在运动过程中不生不灭。

在流体中取由一定流体质点组成的物质体，其体积为τ，质量为m，则

$$m=\int_{\tau}\rho\delta\tau \qquad (12)$$

为了与随体符号 d 区别开来，这里用δ来表示对坐标的微分。

根据质量守恒定律，下式在任一时刻都成立：

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\int_{\tau}\rho\delta\tau\right)=0 \qquad (13)$$

根据公式：

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\tau}\varphi\delta\tau\right)=\int_{\tau}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+div\left(\varphi\boldsymbol{v}\right)\right)\delta\tau \qquad (14)$$

得

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\int_{\tau}\rho\delta\tau\right)=\int_{\tau}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\left(\rho\boldsymbol{v}\right)\right)\delta\tau=0 \qquad (15)$$

因τ是任意取的，且假定被积函数连续，由此推出被积函数恒为 0，于是有：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\left(\rho\boldsymbol{v}\right)=0 \qquad (16)$$

（16）式就是与坐标系选取无关的微分形式的

连续性方程。

8 协变性是对于物理理论的一个要求

文献[34-35]利用光滑约束中的约束力是保守力处理问题的，文献[36]证明了光滑约束的约束力是保守力，本文进一步验证了光滑约束中约束力是保守力的问题。在历史上描述低能粒子行为的薛定谔方程对于洛伦兹变换不是协变的，也就是说它不具有相对论的不变性，狄拉克认为这种情况是不合理的。为了把方程改成具有洛伦兹协变形式，得到了狄拉克方程而预言了反粒子。电子的反粒子——正电子在实验中的发现就是狄拉克反粒子理论的最好总结，也是物理理论协变性要求正当性的最好证明[37]。

在经典物理学中，理论的建立程序为：实验→方程→对称性，而爱因斯坦在狭义相对论的建立中倒转了这个程序：对称性→方程→实验，在广义相对论中，爱因斯坦把这个倒转过来的程序又应用于引力场方程的建立。另外，当把对称性的概念引入物理学中时，便可以把运动的相对性作为一种对称性来看待。在科学中“一种对称性的发现比一种特定现象的发现意义重大得多。像旋转不变性和洛伦兹不变性这样的时空对称性，统治着整个物理学。”在创立狭义相对论时，爱因斯坦利用了洛仑兹（Hendrik Antoon Lorentz，1853-1928）变换的不变性，而在创立广义相对论时，他把变换不变性提升为物理学的普遍原理，并从引力质量与惯性质量等同这一经验事实出发，把某种变换不变性作为表示空间结构四维性和对称张量的引力方程的前提。

力学相对性原理类似于“脚”，伯努利方程等具体的物理方程类似于“鞋”，这样就容易理解它们之间的关系了。通常认为方程的协变性具有特别重大的意义，协变性的含义如下：凡施行坐标变换，应变量（函数）亦必按确定的（例如张量的）规则而变换，我们研究坐标变换时必须同时注意原来的和变换后的函数所满足的方程形式，如果变换后所得到的新变量的新系数和旧变量的旧函数—祥能满足同样形式的方程，则方程就是协变的，由方程的协变性，使我们无须预先选定坐标系就能写出方程，此外因为方程的协变性限制方程形式的种类，同时还帮助挑选正确的形式，故方程的协变性对推动研究工作有重大的意义。但必须着重指出，仅当引入函数的数目亦有限制时，协变性对方程的形式的限制方属有效；如果能引进任何数目的新辅助函数，那事实上可以赋予任何方程以协变的形式。因此方程协变性本身绝不表示任何物理定律，例如在质点系力学中，第二类拉格朗日方程对任意坐标变换都是协变的，而用直角坐标系写出的第一类拉格明日方程则不是协变的，但前者与后者比较，并不表示任何新的物理定律。在拉格朗日方程的情况下，协变性是这样达到的，就是引进用速度表示的二次（不一定是齐次的）拉格朗日函数的系数作为新的辅助函数。文献[38]证明在牛顿力学和狭义相对论框架内能量守恒定律都具有协变性。

9 结语

文献[39]把伯努利方程拓广到电介质流体中，$p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh-\frac{1}{2}PE=\text{const}$，其中$-\frac{1}{2}PE$表示电势能密度，也具有压强的性质，该方程的协变性问题读者可以自行分析。

伯努利方程满足力学相对性原理，力学相对性原理指出，在惯性参考系中，力学定律的形式不变。也就是说，如果一个系统在一个参考系中满足某些力学规律，那么在另一个惯性参考系中观察到的同一系统也应该满足相同的力学规律。

机械能守恒定律：如果所研究的系统只有保守力，那么系统的机械能守恒（不变）。

证明：

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dE_k(v)}{dv}\frac{dv}{dt}+\frac{dE_p(x)}{dx}\frac{dx}{dt}=mva-Fv=mva-mav=0 \quad (17)$$

机械能与时间无关，机械能守恒定律满足力学相对性原理，是时间均匀性反映[40-41]。

伯努利方程是流体力学中的一个能量方程，E_p+Ek=const，不过这里的E_p包括重力势能、正压力势能、侧压力势能和惯性势能（对于惯性系惯性势能为 0）。国际上对于机械能守恒定律和相对性原理的关系也比较纠结，没有一致的观点[42]。

流体力学中的伯努利方程的协变性在流体力学界一致没有定论的根本原因是：①没有认识到侧压力是一个保守力；②没有认识到保守力具有伽利略变换的不变性，误认为侧压力在运动系中变为显含时间的力；③没有认识到惯性力都是保守力。历史上为了证明第五公设，数学家历经大约 2000 年没有成功，最后罗巴切夫斯基等数学家毅然放弃第五公设，从而创立了非欧几何[43]。本文突破了这三个问

题，解决了这一协变性疑难。

伯努利方程是流体力学中的一个重要方程，它描述了流体在流动过程中压力、速度和高度之间的关系，伯努利方程可以被看作是满足力学相对性原理的。当我们考虑的是理想流体（忽略粘性和摩擦等因素）且流动是稳定的时，伯努利方程的形式在不同惯性参考系中保持不变。具体来说，如果我们将参考系转换为另一个惯性参考系，并且假设流体的流动是绝热的（没有热量交换），那么伯努利方程仍然适用，即在新的参考系中，压力、速度和高度之间的关系仍然满足伯努利方程。然而，需要注意的是，实际情况中的流体往往不是理想的，并且可能存在粘性、传热等复杂因素。在这些情况下，伯努利方程的应用可能需要进行修正或使用更复杂的流体力学模型。此外，当涉及到非惯性参考系或相对论效应时，伯努利方程可能需要进一步的修正或采用相对论性的流体力学理论。因此在特定的条件和简化假设下，伯努利方程可以被认为是满足力学相对性原理的。但在实际应用中，需要根据具体情况进行分析和修正，以确保准确描述流体的行为。

著名物理学家、诺贝尔奖金获得者丁肇中认为：“科学是多数服从少数，只有少数人把多数人的观念推翻以后，科学才能向前发展，因此专家评审并不是绝对有用的，因为专家评审是依靠现有的知识，而科学的进展是推翻现有的知识。”

致谢：本文写作过程中曾经受到了中国科学院力学研究所研究员、国家自然科学一等奖获得者吴中祥研究员，河北师范大学物理与电子科学学院教授、《河北师范大学学报（自然科学版）》原副主编刘明成教授，浙江大学光电科学与工程学院博士生导师沈建其教授的指导，再次谨致谢忱！

参考文献

[1] 黄修林.浅谈伯努利方程中的压强能.大学物理,1995, 14(3): 10-11.

[2] 刘明成,刘文芳,赵文桐.弹力机械能守恒定律在各惯性系都成立[J].物理通报,2015(12):109-111.

[3] 郑永令.流体的运动状态与伯努利方程[J].大学物理,1994,13(8):1-4.

[4] 梁天麟,周凌云.从惯性力场与引力场等效到经典动力学方程的不变性.黄淮学刊,第 8 卷第 1 期,1992(3):27-32.

[5] 徐满平.惯性力的性质研究.池州师专学报,第 14 卷第 3 期,2000 年 8 月:21-25.

[6] 李子军.关于非惯性系机械能守恒问题的一点讨论.大学物理,1992(6):41.

[7] 张建忠.对机械能守恒条件的讨论[J].集宁师专学报,2006,28(4):68-69.

[8] 刘力.保守力场中圆运动的稳定性.济宁师范专科学校学报,第 23 卷第 6 期,2002(12):21-22.

[9] 杨振东.离心力势能教学应用三例.物理通报, 2020(4): 15-17,21.

[10] 吕宗禄.惯性力场和保守力场的等效性及其应用.工科物理增刊,2000:249-254.

[11] 侯如松.惯性力是保守力吗.大学物理,1989(11):47,27.

[12] 徐水源.惯性力为保守力的物理条件.常石教育学院学报,2005(3):63-65.

[13] 房晓勇.动力学基本守恒定律在非惯性系的表述.纺织高校基础科学学报,第 8 卷第 1 期,1995(3):100-103,111.

[14] 殷保祥.对非惯性系动力学方程的讨论.丝路学坛,1998 年第 2 期,19-21.

[15] 吴森.要求角速度一定为常矢量吗？--非惯性系机械能守恒定律的一个特例.五邑大学学报(自然科学版),第 9 卷第 2 期,1995:45-49.

[16] 杨景芳,黄耀清.非惯性系中的“三大定理”与机械能守恒.大庆高等专科学校学报,第 19 卷第 4 期,1999 年 12 月:27-29.

[17] 林景波.非惯性系中机械能守恒与参照系选取无关的条件确定.通化师范学院学报,第 30 卷第 2 期,2009(2):27-29.

[18] 马秀艳.非惯性系中机械能守恒定律.安阳师范学院学报,2012(5):120-121.

[19] 杨习志,赵坚.关于机械能守恒定律是否满足相对性原理的探讨.物理教师,第 41 卷第 5 期,2020(5):65-67,72.

[20] 舒幼生.力学.北京大学出版社,2005 年 9 月第一版,2005 年 9 月第一次印刷,85.

[21] 朱如曾.力场与时间有关系统的功能定理及其应用.大学物理,2016(10):11-16.

[22] 许忠诚.伯努力方程的使用条件.河池师专学报,1987 年第一期(理总第五期):37-41.

[23] 凌寅生,王宗谟,陈兆立.伯努利方程在伽利略变换下的协变性.物理教师,第 23 卷第 4 期,2002(4):40-41.

[24] 黄秋华.不同参照系中的伯努利方程.河池师专学报,1989 年第三期(理总第十期):23-25,51.

[25] 董永平,赵光普,刘启能.非惯性系中的伯努利方程.宜宾学院学报,2006(12):52-53.

[26] 田宝忠.非惯性系中的伯努利方程的推导.大庆石油学院学报,2007(2):126-128.

[27] 顾书龙.非惯性系中的伯努利方程.物理与工程,2003(1),第 13 卷第 1 期,1-3.

[28] 林锯聪.也谈非惯性系中的伯努利方程.温州师范学院学报(自然科学版),1997(6):34-37.

[29] 田宝忠.匀速转动参照系下伯努利方程的推导.天津职业院校联合学报,2010(3),第 12 卷第 2 期,76-77.

[30] 刘启能.加速平动参照系中的伯努利方程.电子科技大学学报,1997(6),第 26 卷增刊,265-267.

[31] 刘启能.非惯性参照系中流体的动力学方程及其应用.宜宾师专学报(自然科学版),1998(2):17-20.

[32] 张永祥.对非惯性系流体动力学问题的研究.冀东学刊,1995 年第 6 期:13-16.

[33] 谢鸿伟,吕其光.伯努利方程的物理意义及其在非惯性系中的应用,北京电子科技学院学报.第 7 卷第 2 期,1999 年 12 月:11-12.

[34] 张翠.斜面上下滑滑块机械能守恒问题新解.物理通报,2016(9):115-117.

[35] 李学生.对一道困扰力学界五十多年习题的思考.百科论坛,2020 年 7 月(上):74-77.

[36] 李学生.匀速圆周运动中的机械能守恒问题.论证与研究,2020 年第 8 期:9.

[37] 韩锋.试论爱因斯坦的协变性原理.新疆大学学报(自然科学版),1985 年第二期:22-26.

[38] 李子军,李根全,白旭芳.牛顿力学形式和相对论力学的协变性.大学物理,2002,21(6):22-23.

[39] 冯子江,鲁斌.伯努利方程在电介质流体中的应用.物理通报,2021 年第 10 期:33-35.

[40] 刘明成.对一道困扰中国力学教学 40 多年习题的思考.2025 年全国高等学校物理基础课程教育学术研讨会论文集.清华大学出版社,2025 年 7 月:20-27.

[41] 李学生.动量守恒定律与角动量守恒定律的协变性疑难.国际教育学,2025 年第 7 卷第 7 期:30－38.

[42] Santos FC, Soares V and Tort AC. A note on the conservation of mechanical energy and the Galilean principle of relativity[J]. European Journal of Physics. 2010,31(4):827-834.

[43] 刘明成.电子的电磁质量不是引力质量的一部分.2025 物理与工程前沿教育教学创新研讨会暨大学物理 MOOC 联盟工作会会议论文集.78-84.