

抽象函数中不等式竞赛题解法例析

高爱丽

扬州大学数学科学学院 江苏扬州

【摘要】抽象函数属于数学竞赛里的高频考查知识点。抽象函数不等式类问题，因自身具备的抽象性、灵活性、技巧性、综合性与隐蔽性等特征，成了能有效检验学生逻辑推理能力和函数性质应用能力的重要题型，针对抽象函数不等式竞赛题的常见题型，可对六种核心解题方法做系统的梳理与分析，这六种方法分别是单调性法、赋值法、构造法、柯西法、迭代法以及凹凸性法。本文选取全国高中数学联赛、国内外各类经典竞赛真题和改编习题作为具体案例，结合每一道例题展开细致的解题解析，能为参与数学竞赛的学生梳理清晰的解题思路、提供实用的方法指导，也能让学生更从容地应对各类抽象函数不等式竞赛题目。其中单调性法与构造法适用范围最广，柯西法与迭代法对特定函数方程结构更具针对性，合理选择与组合这些方法可显著提升竞赛解题效率。

【关键词】抽象函数；不等式；数学竞赛；解题策略

【收稿日期】2026 年 3 月 14 日 **【出刊日期】**2026 年 4 月 18 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20260007

Analysis of the problem solving problem of inequalities in abstract functions

Aili Gao

School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】 Abstract functions belong to the high-frequency examination of knowledge points in mathematics competitions. Abstract function inequality problems, due to their own abstraction, flexibility, skill, comprehensiveness and concealment, have become an important question type that can effectively test students' logical reasoning ability and function property application ability. This paper selects the National High School Mathematics League, various classic competition questions and adapted exercises at home and abroad as specific cases, and carries out detailed problem-solving analysis in combination with each example problem, which can sort out clear problem-solving ideas for students participating in mathematics competitions, provide practical method guidance, and allow students to deal with various abstract function inequality competition questions more calmly. Among these methods, the monotonicity method and the construction method have the broadest applicability, while the Cauchy method and the iteration method are more targeted towards specific types of functional equations. Properly selecting and combining these methods can significantly improve problem-solving efficiency in competitions.

【Keywords】 Abstract function; Inequality; Math competitions; Problem-solving strategies

1 引言

数学竞赛里的抽象函数问题，是题目里没有给出具体函数解析式，只依靠一个或是多个函数方程，比如 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 来确定函数之间关系的题型。抽象函数不等式问题则是其中复杂度较高、挑战性较强的一类题目，这类题目既能考查学生对高中阶段函数性质的理解和运用能力，也会涉及到多种数学思想与解题技巧。掌握行之有效的解题方法，对提升数学竞赛的成绩有着很重要的作用。这类题目形式多样、解法灵活，也是检验高中生数学核心素养的重要标准。想要顺利解决这类问题，关键是要完成从抽象到具体、从性质到应用这两个转化，也就是从题目给出的函数方程里提炼出函数的各类基本性质，或是借助赋值、构

造等特定方式把抽象的函数变得具体化,再把得到的性质和结论作为推导不等关系的逻辑依据。本文会重点讲解几种解答抽象函数中不等式问题的常用解法,也会结合对应的具体例题展开分析与说明^[1]。

2 常用解法

2.1 单调性法

2.1.1 方法概述

函数单调性是函数的一个重要性质。一般情况下,如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增,那么对于任意 $x_1, x_2 \in I$,若 $x_1 < x_2$,则有 $f(x_1) \leq f(x_2)$;反之,如果函数 $f(x)$ 单调递减,则 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 。单调性法的核心思想是利用函数的单调性,将函数值的大小关系转化为自变量的大小关系。如果可以确定抽象函数的单调性,则可以利用单调性来解决不等式关系^[2]。

2.1.2 典型例题

例 1: (2013 年全国高中数学联赛辽宁省预赛第 4 题) 设函数 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 内的单调函数,且对任意 $x \in (0, +\infty)$ 都有 $f[f(x) - \log_2 x] = 6$ 。若 x_0 是方程 $f(x) - f'(x) = 4$ 的一个解,且 $x_0 \in (a-1, a) (a \in \mathbb{N}^*)$, 则 a 的值为 ()。

解 因为函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调,所以有且只有一个实数 $k \in (0, +\infty)$,使得 $f(k) = 6$ 。因此对于任意 $x \in (0, +\infty)$ 都有, $f(x) - \log_2 x = k$, 即 $f(x) = \log_2 x + k$ 。

令 $x = k$, 则有 $f(k) = \log_2 k + k = 6, k = 4$ 。所以, $f(x) = \log_2 x + 4, f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$ 。

因此,对于方程 $f(x) - f'(x) = 4$, 有 $4 + \log_2 x - \frac{1}{x \ln 2} = 4$ 。因此, $\log_2 x = \frac{1}{x \ln 2}$

$\frac{\ln x}{\ln 2} = \frac{1}{x \ln 2}, x \ln x = 1$ 。设 $g(x) = x \ln x$, 则有 $g(1) = 0, g(2) = 2 \ln 2 = \ln 8 > 1$ 。因为 x_0 是方程 $f(x) - f'(x) = 4$ 的一个解,所以 $x_0 \in (1, 2)$ 。又因为 $x_0 \in (a-1, a) (a \in \mathbb{N}^*)$, 则有 $a = 2$ 。

2.2 赋值法

2.2.1 方法概述

赋值法是一把求解抽象函数的利剑。在竞赛里的一些题目中,并不会给出清晰的抽象函数的解析式,但是一般会告知函数的一些性质或关系式。我们可以选取赋值法,通过赋予变量特定数值或代数式,如 $0, 1, -1, x$ 等。经过合理的赋值,将抽象函数具体化,获得有关函数的性质或函数值。这是处理抽象函数问题的常用技巧^[3]。

2.2.2 典型例题

例 2: (2025 年全国高中数学联赛江苏省预赛第 12 题) 设函数 $f(x)$ 定义在 $[0, +\infty)$, $f(2) = 0$, $f(x) \geq 0$, 且当 $0 \leq x < 2$ 时, $f(x) \neq 0$ 。

若 $f(xf(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$, 则 $f\left(\frac{20}{11}\right) + f\left(\frac{25}{11}\right) = ()$ 。

解 首先,因为 $f(xf(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$, 令 $x = 0$, 得 $f(0) \cdot f(y) = f(y)$ 。由于 $0 \leq y < 2$ 时, $f(y) \neq 0$, 故 $f(0) = 1$ 。把 $y = 2$ 代入 $f(xf(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$, 方程变为, $f(x \cdot 0) \cdot 0 = f(x+2)$, 得 $f(x+2) = 0$ 。因此,当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = 0$ 。

接下来分析 $0 \leq y < 2$ 的情况。取 $x = 2 - y > 0$ ，则 $x + y = 2$ ，右边 $f(2) = 0$ ，左边为 $f((2-y)f(y)) \cdot f(y) = 0$ 。因为 $f(y) \neq 0$ ，故 $f((2-y)f(y)) = 0$ ，即 $(2-y)f(y) \geq 2$ 。再取 $0 \leq x < 2 - y$ ，则 $x + y < 2$ ，右边 $f(x+y) \neq 0$ ，左边 $f(xf(y)) \cdot f(y) \neq 0$ ，故 $xf(y) < 2$ 。当 $x \rightarrow (2-y)^-$ 时， $(2-y)f(y) \leq 2$ 。结合上述两式得， $(2-y)f(y) = 2$ ，即当 $0 \leq y < 2$ 时， $f(y) = \frac{2}{2-y}$ 。经过验证函数表达式满足原方程，确认正确。

因为 $\frac{20}{11} < 2$ ，故 $f\left(\frac{20}{11}\right) = \frac{2}{2-\frac{20}{11}} = \frac{2}{\frac{2}{11}} = 11$ 。因为 $\frac{25}{11} > 2$ ，故 $f\left(\frac{25}{11}\right) = 0$ 。因此 $f\left(\frac{20}{11}\right) + f\left(\frac{25}{11}\right) = 11$ 。

2.3 构造法

2.3.1 方法概述

构造法是解决抽象函数不等式题型的核心方法。此方法需要构造一个新函数，并且利用导数研究函数的单调性，将复杂的问题转化为更容易解决的形式，从而解决原来抽象函数不等式问题。构造法的本质是一种逆向思维，从题目中给出的不等式出发，寻找一个新函数 $F(x)$ ，使得 $F'(x)$ 的符号可由题设条件确定^[4]。

2.3.2 典型例题

例 3：（2017 年全国高中数学联赛湖南省预赛第 12 题）设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0)$ 内的可导函数，其导函数为 $f'(x)$ ，且 $2f(x) + xf'(x) > x^2$ ，则不等式 $(x+2017)^2 f(x+2017) - f(-1) > 0$ 的解集为 $(\quad)$ 。

解 构造函数 $F(x) = x^2 f(x)$ ，则 $F'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) = x[2f(x) + xf'(x)]$ 。由于 $x \in (-\infty, 0)$ ，且 $2f(x) + xf'(x) > x^2$ ，所以 $F'(x) < 0$ ，即 $F(x)$ 在定义域内单调递减。

因此，不等式 $(x+2017)^2 f(x+2017) - f(-1) > 0$ 可以转化为式子 $F(x+2017) > F(-1)$ ，解得 $x+2017 < -1$ ，即解集为 $x \in (-\infty, -2018)$ 。

2.4 柯西法

2.4.1 方法概述

柯西不等式是证明不等式的重要工具，在抽象函数问题中常用于证明函数表达式或构造特定形式。其中柯西不等式：设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 为两组实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

等号成立当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ ^[5]

柯西法本质是通过可加性、齐次性直接刻画函数整体形态，再依托单调性与函数大小关系，将抽象函数不等式转化为自变量的代数不等式，步骤规整、逻辑性强，适合竞赛中含可加、可乘结构的抽象函数不等式求解^[6]。

2.4.2 典型例题

例 4：（2020 年全国高中数学联赛改编题）设 $f(x)$ 是正实数集上的函数，满足 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ ，且 $f(3) = 1$ ，求证： $\frac{f^2(a)}{f(b)} + \frac{f^2(b)}{f(a)} \geq f(a) + f(b)$ 。

解 由 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ ，结合柯西函数方程性质，知 $f(x) = kx (k > 0)$ ，且由 $f(3) = 1$ 得

$k = \frac{1}{3}$ 。应用柯西不等式, $\left(\frac{f^2(a)}{f(b)} + \frac{f^2(b)}{f(a)} \right) (f(a) + f(b)) \geq (f(a) + f(b))^2$

两边除以正数 $f(a) + f(b)$, 不等式得证。

2.5 迭代法

2.5.1 方法概述

迭代法是处理无具体解析式、仅满足约束条件的抽象函数不等式的经典递推方法。当题目中存在明显迭代关系式时, 可以采用迭代法将题目化难为易, 化解抽象函数^[7]。注意此类型题找准迭代关系与细心迭代是关键。

2.5.2 典型例题

例 5: (2011 年全国高中数学联赛贵州预赛题) 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足, $f(0) = 0$, $f(x) + f(1-x) = 1$, $f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}f(x)$, 且当 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ 时, 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 求 $f\left(\frac{1}{2011}\right)$ 的值。

解 由 $f(0) = 0$, $f(x) + f(1-x) = 1$, 易知 $f(1) = 1$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}f(1) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 。又 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ 时, 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 所以 $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$ 时, 恒有 $f(x) = \frac{1}{2}$ 。由题 $f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}f(x)$, 运用迭代法:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2011}\right) &= f\left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{2011}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2011}\right) \\ &= \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{3} \times \frac{3^2}{2011}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 f\left(\frac{3^2}{2011}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^6 f\left(\frac{3^6}{2011}\right)。 \end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{2} \leq \frac{3^6}{2011} \leq \frac{1}{3}$, 即 $f\left(\frac{3^6}{2011}\right) = \frac{1}{2}$, 故 $f\left(\frac{1}{2011}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{128}$ 。

因此 $f\left(\frac{1}{2011}\right) = \frac{1}{128}$ 。

2.6 凹凸性法

2.6.1 方法概述

凹凸性法是利用函数凹凸性质证明不等式的方法, 特别适用于涉及指数函数、对数函数的不等式^[8]。

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上是二阶可导: 若 $f''(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数(下凸); 若 $f''(x) \leq 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上为凹函数(上凹)。

凸函数的性质: $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) (0 \leq t \leq 1)$

凹函数的性质: $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y) (0 \leq t \leq 1)$ 。

2.6.2 典型例题

例 6: (全国高中数学联赛改编题) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸函数, 且 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导。

证明: 对任意 $x_1, x_2 \in I$, 有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 。

解 (方法一) 由凸函数的定义, 对 $x_1, x_2 \in I$ 和 $\lambda \in (0,1)$, 有 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ 。

取 $\lambda = \frac{1}{2}$, 则 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 。

(方法二) 由题意, 函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸函数, 且 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导。根据凸函数的判定定理, 有 $f''(x) \geq 0$ 。

构造辅助函数, $F(x) = f(x) - \left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right) \right]$, 则 $F''(x) = f''(x) \geq 0$,

则 $F(x)$ 为凸函数, 且 $F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = 0$, $F'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = 0$ 。

根据凸函数的性质, $F(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得最小值, 故对任意 $x \in I$, 有 $F(x) \geq 0$ 。特别得, 取 $x = x_1$ 和 $x = x_2$, 得 $f(x_1) \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_1 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)$, $f(x_2) \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 。

两式相加, 整理得 $f(x_1) + f(x_2) \geq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 。

3 结论

抽象函数不等式是数学竞赛中很重要的一类题型。熟练掌握了单调性法、赋值法、构造法、柯西法、迭代法和凹凸性法这六种解题方法, 能帮助高中生把不同类型的抽象函数不等式问题高效地解决掉。在数学竞赛的解题过程中, 学生要学会对各类解题方法做到灵活运用。一方面要注重单一方法的合理选择, 另一方面也要做好不同方法间的综合搭配使用, 以此提升解题的效率和准确率。学生通过系统化的知识学习和足量的习题练习, 能逐步培养起自身的数学思维能力与创新意识, 也能为今后在数学竞赛中拿到优异的成绩, 打下足够坚实的基础。

参考文献

- [1] 刘再平. 赏析竞赛中的抽象函数问题[J]. 数学通讯, 2014, (Z1): 114-117.
- [2] 徐智愚. “函数单调性”在不等式竞赛题中的妙用[J]. 上海中学数学, 2008, (04): 21-23.
- [3] 余涛. 合理赋值, 快速求解抽象函数问题[J]. 语数外学习(高中版中旬), 2023, (12): 50-51.
- [4] 刘建军. 构造法在抽象函数问题中的应用研究[J]. 数理化解题研究, 2021, (22): 76-78.
- [5] 蒋彦杰, 武柯. 柯西不等式及其应用[J]. 中学数学研究, 2025, (12): 63-64.
- [6] 代卫东. 一道不等式竞赛题的变式探究[J]. 数学通讯, 2022, (22): 57-59.
- [7] 冯云. 六法破解抽象函数竞赛题[J]. 数理天地(高中版), 2020, (08): 31-32.
- [8] 何再乐. 用函数的凹凸性证明不等式竞赛题[J]. 中学教研, 1992, (01): 20-22.

版权声明: ©2026 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS