例析高考数列前 n 项和问题的求解策略

刘晓琳

扬州大学数学科学学院 江苏扬州

【摘要】高中数学中的“数列求前 n 和问题”是高考中常见的重点题型，难度一般属于中等偏下，主要考查学生的逻辑推理能力和数学运算能力。本文结合历年高考数学真题，详细分析了六种数列求前 n 和的方法：求和公式的直接应用、错位相减法、裂项相消法、分组求和法、倒序相加法以及通项公式法，为数列部分的教学和备考提供了参考。

【关键词】数列前 n 项和；错位相减法；裂项相消法；分组求和法

【收稿日期】2025 年 5 月 14 日 【出刊日期】2025 年 6 月 18 日 【DOI】10.12208/j.aam.20250013

Case studies on problem-solving strategies for the sum of the first *n* terms in sequences in the national college entrance examination

Xiaolin Liu

School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【**Abstract**】Calculating the sum of the first n terms of sequences in high school mathematics is a common and key topic in the National College Entrance Examination (Gaokao), typically categorized as moderately challenging. It primarily assesses students' logical reasoning and mathematical operation skills. By analyzing past Gaokao mathematics questions, this paper systematically elaborates on six solution strategies for sequence summation: direct application of the general term formula, the method of subtraction by dislocation (telescoping series), term-splitting and cancellation method, group summation method, reverse-order addition method, and derivation of the general term formula method. The study aims to provide practical references for teaching and exam preparation in sequence learning.

【**Keywords**】Sum of the first n terms of a sequence; Method of dislocated subtraction; Method of telescoping series; Group summation method

1 引言

数列作为高中数学的核心内容之一，一直以来都是高考数学试题中重点考查的对象[1]。特别是在数列前 n 项求和的问题中，题目通常具有较强的综合性，且解法灵活多样，既要求学生熟练掌握各类基础公式，又要具备较强的逻辑推理和数学变形能力。本文以高考真题为例，详细介绍了求和公式的直接应用、错位相减法、裂项相消法、分组求和法、倒序相加法及通项公式法六种数列前 n 项和问题的求解策略，旨在为教学与备考提供参考。

2 数列前 n 项和问题的求解策略

2.1 求和公式的直接应用

如果题目给出的前提是等差数列或等比数列，在求解前 n 项和时，可以直接应用相应的公式[2]。这类问题要求学生能够准确识别数列的类型，并且考察学生对数列的基本性质、公式的理解和熟练运用。而且这种方法通常与其他方法一起用来求解数列前 n 项和问题。

不同数列的求和公式如下：

（1）等差数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

（2）等比数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为

$$S_n=\begin{cases}na_1,q=1;\\ \dfrac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q},q\neq 1.\end{cases}$$

例 1（2024 全国甲卷文 15）已知等比数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和为S_n，且$2S_n=3a_{n+1}-3$.

（1）求$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）求数列$\left\{S_n\right\}$的通项公式.

解 因为$2S_n=3a_{n+1}-3$，所以$2S_{n-1}=3a_n-3$，则$2a_n=3a_{n+1}-3a_n(n\geq 2)$，

即$5a_n=3a_{n+1}$，所以等比数列$\left\{a_n\right\}$的公比为$q=\dfrac{5}{3}$，又因为

$$2a_1=3a_2-3=3a_1\times\frac{5}{3}-3=5a_1-3,$$

所以$a_1=1$，故$a_n=\left(\dfrac{5}{3}\right)^{n-1}$.

（2）由等比数列的求和公式得

$$S_n=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{5}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{5}{3}}=\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n-\frac{3}{2}.$$

评注：（1）利用递推公式求出等比数列$\left\{a_n\right\}$的公比和首项得到通项公式；（2）直接利用等比数列的求和公式得到数列$\left\{S_n\right\}$的通项公式。这种题目是数列求 n 项和问题中最简单的问题，只需要识别数列的类型即可。

2.2 错位相减法

错位相减法求和在高考中占据了非常重要的地位，近年来高考中的数列题目中经常涉及到这类内容[3]。这种方法是在人教版必修 5 推导等比数列求和公式时所学习到的。它适用于数列$\left\{a_n\right\}$是等差数列，数列$\left\{b_n\right\}$是等比数列，求数列$\left\{a_n\cdot b_n\right\}$前 n 项和的情况，总共有展开、乘公比、错位相减、求和四个步骤。在使用这种方法时，需注意以下两点：

（1）在写出S_n与qS_n的表达式时应将两式“错项对齐”；

（2）应用等比数列求和公式时必须要注意公比 q 是否等于 1.

例 2（2024 全国甲卷理 18）记S_n为数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和，且$4S_n=3a_n+4$.

（1）求$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）设$b_n=(-1)^{n-1}na_n$，求数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和为T_n.

解（1）当 n=1 时，$4S_1=3a_1+4$，解得$a_1=4$. 当$n\geq 2$时，$4S_{n-1}=3a_{n-1}+4$，所以

$$4S_n-4S_{n-1}=4a_n=3a_n-3a_{n-1}$$

即 $a_n=-3a_{n-1}$.又因为 $a_1=4$，所以 $a_n\neq 0$，故 $q=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=-3$，则数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为首项，-3 为公比的等比数列，即

$$a_n=4\cdot(-3)^{n-1}.$$

（2）由题意可得 $b_n=(-1)^{n-1}n\cdot 4\cdot(-3)^{n-1}=4n\cdot 3^{n-1}$，所以

$$\begin{aligned}T_n&=4\cdot 3^0+8\cdot 3^1+12\cdot 3^2+\cdots+4n\cdot 3^{n-1}\\3T_n&=\qquad 4\cdot 3^1+8\cdot 3^2+12\cdot 3^3+\cdots+4(n-1)\cdot 3^{n-1}+4n\cdot 3^n\end{aligned},$$

则

$$\begin{aligned}-2T_n&=4+4\cdot 3^1+4\cdot 3^2+\cdots+4\cdot 3^{n-1}-4n\cdot 3^n\\&=4+4\cdot\frac{3(1-3^{n-1})}{1-3}-4n\cdot 3^n\\&=(2-4n)\cdot 3^n-2\end{aligned}$$

所以 $T_n=(2n-1)\cdot 3^n+1$.

评注：（1）利用递推关系式求出 $\{a_n\}$ 的通项公式；由（1）可知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以数列 $\{b_n\}$ 的各项是由一个等差数列与一个等比数列对应项的乘积组成，可使用错位相减法求出前 n 项和为 T_n.

2.3 裂项相消法

裂项相消法是一种将数列通项拆解成几项之差，在求和过程中抵消一些正负项来简化和式的方法。这种方法使得数列的前 n 项和往往可以转化为几项的和或差[4]。在使用裂项相消法时，我们需要特别注意哪些项会互相抵消或保留，需要细心观察数列的特点。为了确保计算的准确性，通常可以将数列的前几项和后几项列出进行对比，找出那些相互抵消或者可以合并的项。这种方法在高考题型中较为常见，尤其是涉及到数列求和时，常常会用到一些裂项公式来帮助简化计算：

（1）$\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k})$；

（2）$\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$；

（3）$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

例 3（2022 新高考 I 卷 17）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$.

解：（1）因为 $a_1=1$，$S_1=a_1=1$，$\dfrac{S_1}{a_1}=1$，且 $\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列，所以

$\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$，$S_n=\frac{(n+2)a_n}{3}$，

则当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，从而有 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(n+2)a_n}{3}-\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，则 $(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$，即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，所以

$$a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\ldots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}$$
$$=1\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\ldots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2},$$

显然对于 $n=1$ 也成立，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

（2）因为 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}==2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2.$$

评注：（1）利用等差数列的通项公式、和与项的关系、累乘法求得 $\{a_n\}$ 的通项公式，并且检验了对于 $n=1$ 是否成立；（2）由（1）的结论，由裂项相消法的第一个公式得 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，进而证得。裂项相消法在数列求和问题中应用较为简单，只需要选择合适的裂项公式即可。

2.4 分组求和法

分组求和法是一种将不能直接求和的数列，通过拆解或变形，转化为若干个可以单独求和的数列，然后对每个部分分别求和，最后将这些和加在一起的求解方法。这种方法适用于以下数列[5]：

（1）数列的通项可以拆解为等差数列或等比数列的和；

（2）数列的通项呈分段形式，即奇数项和偶数项的通项公式不同；

（3）数列的通项具有周期性；

（4）数列通项公式或递推关系含有 $(-1)^n$；

（5）数列的通项公式或递推关系中包含三角函数。

例 4（2023 新课标 II 卷 18）$\{a_n\}$ 为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6, n\text{为奇数}\\ 2a_n, n\text{为偶数}\end{cases}$，记 S_n，T_n 分别为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和，$S_4=32$，$T_3=16$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

解（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，而 $b_n=\begin{cases}a_n-6, n=2k-1\\ 2a_n, n=2k\end{cases}, k\in\mathrm{N}^*$，则

$b_1=a_1-6; b_2=2a_2=2a_1+2d; b_3=a_3-6=a_1+2d-6$，

于是 $\begin{cases}S_4=4a_1+6d=32\\ T_3=4a_1+4d-12=16\end{cases}$，解得 $a_1=5, d=2$，$a_n=a_1+(n-1)d=2n+3$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n = 2n+3$.

（2）由题意可得

$$\begin{aligned}T_{2n} &= b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n+b_{n+1}+\cdots+b_{2n}\\ &=(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})\\ &=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}-6n)+2(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})\\ &=(a_1+a_2+\cdots+a_{2n})-6n+a_2+a_4+\cdots+a_{2n}\\ &=S_{2n}-6n+\frac{n(a_2+a_{2n})}{2}=S_{2n}+2n^2-n.\end{aligned}$$

则$T_{2n+1}=T_{2n}+b_{2n+1}=S_{2n}+2n^2-n+a_{2n+1}-6.$

当$n\ge 1$时，$T_{2n}-S_{2n}=2n^2-n>0$，即$T_{2n}>S_{2n}$；

当$n>2$时，$T_{2n+1}-S_{2n+1}=2n^2-n-6>0$，即$T_{2n+1}>S_{2n+1}$.

综上可证当$n>5$时，$T_n>S_n$.

评注：(1)根据数列$\{b_n\}$的通项公式，分别写出前三项中的奇数项和偶数项，然后将它们加和表示T_3。对于等差数列$\{a_n\}$，直接用求和公式表示出S_4。根据题的两件联立方程组求出首项和公差，进而得到$\{a_n\}$的通项公式。(2)由于$b_n=\begin{cases}a_n-6, n\text{为奇数}\\ 2a_n, n\text{为偶数}\end{cases}$，所以数列$\{b_n\}$的前 2n 项和可以分为奇数项与偶数项两组，分别求和。然后再分别证明当$n>5$时，奇数个项相加的$T_{2n+1}>S_{2n+1}$，偶数个项相加的$T_{2n}>S_{2n}$.

2.5 倒序相加法

如果一个数列的前 n 项中，任意一项与其对应的对称项（即与首末两端等距离的项）之和都等于首项和末项之和，那么就可以使用倒序相加法来求这个数列的前 n 项和。等差数列的前 n 项和公式就是这样推导出来的[6]。运用倒序相加法求数列前 n 项和，首先判断任意一项与其对应的对称项（即与首末两端等距离的项）之和是否都等于首项和末项之和，然后将数列的各项倒序排列得到一个新数列，最后将新数列与原数列的相同位置的项对应相加，求出的和除以 2 即可求得原数列的前 n 项和。但这种方法适用范围狭窄，在高考题求解中使用较少。

例 5（2003 上海卷）设$f(x)=\dfrac{1}{2^x+\sqrt{2}}$，利用课本中推导等差数列前 n 项和公式的方法[7]，可求得$f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+f(1)+\cdots f(5)+f(6)=$______。

解 由题意可得$f(1-x)=\dfrac{1}{2^{1-x}+\sqrt{2}}$，所以

$$\begin{aligned}f(x)+f(1-x)&=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}+\frac{1}{2^{1-x}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot 2^x+2}+\frac{2^x}{2+\sqrt{2}\cdot 2^x}\\ &=\frac{\sqrt{2}+2^x}{\sqrt{2}(2^x+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+f(1)+\cdots f(5)+f(6)\\ &=\frac{1}{2}[f(-5)+f(6)+f(-4)+f(5)+\cdots+\cdots f(5)+f(-4)+f(6)+f(-5)]\\ &=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}.\end{aligned}$$

评注：题目指明了使用倒序相加法进行求解，利用函数表达式求出了与首末两端等距离的项之和都等于首项和末项之和等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$，进而求出结果为$3\sqrt{2}$.

2.6 通项公式法

通项公式法主要适用于那些已知数列前 n 项和S_n的递推公式，并且递推公式符合常见的求解数列通项公式的方法的题型[8]。常用的求解技巧包括累加法、累乘法、公式法、以及待定系数法等。这些方法各自有其特定的适用场景和技巧。例如，累加法通常用于递推公式具有加法结构的情况，通过将递推关系累加起来得到通项公式；累乘法适用于递推公式具有乘法关系的情况，可以通过对递推式两边同时乘以某个常数来简化推导；公式法则是在已知常见递推关系时，直接运用已知的公式来求解通项；而待定系数法则是在递推关系较为复杂时，通过假设通项公式的形式，再通过代入已知条件来确定通项的系数。

例 6（2015 新课标II卷理 16）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$a_1=-1$，$a_{n+1}=S_{n+1}\cdot S_n$，则S_n=______。

解 因为$a_{n+1}=S_{n+1}\cdot S_n$，所以$S_{n+1}-S_n=S_{n+1}\cdot S_n$，即$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}=1.$

又因为$a_1=-1$，所以$\frac{1}{S_1}=-1$，则数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是以-1 为首项，-1 为公差的等差数列，即$\frac{1}{S_n}=-n$，所以$S_n=-\frac{1}{n}.$

评注：题目已知递推公式为$a_{n+1}=S_{n+1}\cdot S_n$，通过变形得$S_{n+1}-S_n=S_{n+1}\cdot S_n$.利用公式法，进一步变形为$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}=1$，得到等差数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$.最后通过数列的通项公式求出数列$\{a_n\}$的前 n 项和为$S_n$.这种方法的一般步骤为：（1）从递推公式出发，选择合适的方法将数列$\{a_n\}$转化为关于其前 n 项和S_n的新数列;（2）借助新数列通项公式求出S_n.

3 总结

数列求和是高中数学知识体系中的重要模块，其方法多样性与题型综合性对学生的数学素养提出了较高要求。本文通过例析高考真题，系统阐述了六大求和方法的核心思想：

（1）求和公式的直接应用是等差数列与等比数列求和的基础，需精准识别数列类型；

（2）错位相减法需注意在写出S_n与qS_n的表达式时应将两式“错项对齐”；

（3）裂项相消法以拆分通项为关键，通过抵消中间项化繁为简，需熟练掌握常见裂项形式；

（4）分组求和法针对分段、周期或混合型数列，通过分组转化实现分而求之；

（5）倒序相加法适用于对称性数列，巧妙利用对称项之和恒等关系简化计算；

（6）通项公式法结合递推关系，得到与S_n相关的新数列逆向求解前 n 项和。

这些求和方法虽然看似各有不同，但其实它们的核心思想都是通过调整数列的结构和形式，将其转化为可以应用等差或等比数列求和公式求解的形式，或者通过消去项来简化问题。学生只要掌握这一规律，数列求和问题就能够轻松解决。

参考文献

[1] 王健,王超.高考数学中数列求和方法归类及解题策略[J].数理化学习(高中版),2023,(07):30-32.

[2] 郭首东.解决数列求和问题的四种方法[J].数理天地(高中版),2024,(11):14-15.

[3] 耿强.高考中数列试题的解题方法与技巧[J].中学生数理化(学研版),2012,(11):32.

[4] 黄雪林.谈裂项相消在高考数列求和问题中的应用[J].数学学习与研究，2014（05）:109.

[5] 周磊.分组求和法在数列求和中的使用[J].数理化学习(高中版),2023,(08):6-8.
[6] 许欣,廖小莲.探究高考数列求和问题的解法[J].数理化解题研究,2021,(31):49-50.
[7] 牛志忠,余梦琪.数列求和问题的高考题型及解法[J].中学生数理化(高二数学),2025,(01):24-26.
[8] 刘强.例谈数列求和的其他方法[J].数理天地(高中版),2025,(09):44-45.