论四元数理论存在的缺陷及其替代方案

李学生

济南市长清第一中学 山东济南

【摘要】现在数学界一致公认四元数是复数集的推广，并在此基础上发展了八元数等超复数，四元数矩阵在数学及其它学科领域的理论研究中有着广泛的应用，是四元数体上重要定理，它在矩阵的学习过程中占有很重要的地位。然而本研究分析表明四元数作为复数集的拓广不满足数集扩展的必要性，把四元数作为复数集的拓广不满足数集的扩展原则，根据数集的扩展——原数集作为新数集的特例，原数集里的原有运算法则依然成立，即对应原理成立；在三维矢量 ai+bj+ck 中 i、j、k 是为了区分矢量在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量而作的标记，可以规定 $i^2=j^2=k^2=1$ 或其他数值，但在复数 a+bi 中的 i 有着特殊的含义：$i^2=-1$。在四元数 ai+bj+ck+d 中，当 d=0 时表示三维矢量，a、b、c 分别代表在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量，因此当 c=0 时，二维矢量应为 ai+bj，a、b 分别代表在 x 轴、y 轴上的分量，但单位不一致，前者为 i、j，后者为 1、i，而 $i^2=j^2=-1\neq1$，因此这本身就具有一种不协调性，阐明了哈密尔顿四元数不能作为复数集的拓广，从而将矢量乘法与普通乘法区别开来，用几何积代替四元数，才满足数集的扩展原则和科学美的理念。新数集应是自然规律的产物，而不应是人为的约定；新数集的结论或保持与原数集一致，或者为原数集的推广，数学发展的方向就是运算类的扩充与数域的拓广。

【关键词】四元数；几何积；数集的扩展原则；矢量乘法；普通乘法

【收稿日期】2025 年 11 月 14 日 【出刊日期】2025 年 12 月 8 日 【DOI】10.12208/j.aam.20250021

On the defects of quaternion theory and its alternative solutions

Xuesheng Li

Changqing No.1 High School of Jinan, Jinan, Shandong

【**Abstract**】It is now universally acknowledged in the mathematical community that quaternions are an extension of the set of complex numbers, and based on this, hypercomplex numbers such as octonions have been developed. Quaternion matrices are widely used in theoretical research in mathematics and other disciplines, being important theorems over the quaternion division algebra, and they hold a crucial position in the learning process of matrices. However, the analysis of this study shows that treating quaternions as an extension of the complex number set does not meet the necessity of number set expansion, nor does it comply with the principles of number set extension. According to number set expansion rules—the original number set serves as a special case of the new number set, and the original operational rules in the original number set still hold, meaning the correspondence principle is satisfied. In the three-dimensional vector ai+bj+ck, i, j, and k are markers to distinguish the components of the vector on the x-axis, y-axis, and z-axis respectively, it is permissible to stipulate that $i^2 = j^2 = k^2 = 1$or assign other values to them. But in the complex number a+bi, i has a special meaning: $i^2 = -1$. In the quaternion ai+bj+ck+d, when d=0, it represents a three-dimensional vector, with a, b, and c representing the components on the x-axis, y-axis, and z-axis respectively. Therefore, when c = 0, the two-dimensional vector should be ai + bj, with a and b representing the components on the x-axis and y-axis respectively. However, there is an inconsistency in the units—

作者简介：李学生（1959-）男，中学高级教师。

the former uses i and j, while the latter uses 1 and i, and $i^2 = j^2 = -1 \neq 1$. This itself presents an incoherence, illustrating that Hamilton's quaternions cannot be regarded as an extension of the complex number set. Thus, only by distinguishing vector multiplication from ordinary multiplication and replacing quaternions with geometric products can the principles of number set extension and the concept of scientific beauty be satisfied. A new number set should be a product of natural laws rather than artificial conventions; its conclusions should either be consistent with lower-level number sets or serve as their extensions. The direction of mathematical development lies in the expansion of operation types and the extension of number fields.

【**Keywords**】Quaternion; Geometric product; Principle of number set extension; Vector multiplication; Ordinary multiplication

随着当今时代的发展，数学也在跟随着时代的步伐向前迈进。四元数矩阵在数学及其它学科领域的理论研究中有着广泛的应用，是四元数体上重要定理，它在矩阵的学习过程中占有很重要的地位[1-18]。四元数的发现离不开爱尔兰数学家哈密尔顿，是他对四元数进行了开创性的数学定义。四元数有它本身的独特性，在数学学科中乘法交换律是公认的基础原则，但四元数却放弃了，所以四元数有它的独特魅力。假如把四元数的集合研究成多维实数空间的话，四元数就表示为一个四维空间，相当于复数为二维空间。四元数是除环(除法环）的一个事例，除了不包含乘法的交换律以外，除法环与域是类似的。尤其是，乘法的结合律一直存在、非零元素一直有唯一的逆元素。四元数表示成一个在实数上的四维结合代数（实际上是除法代数），并且包括复数，但是不和复数形成结合代数。四元数（及其实数和复数）仅仅是有限维的实数结合除法代数。四元数的不可交换性通常致使一系列使人意外的结论，比如四元数的 n 阶多项式可以有大于 n 个不同的根。

1 四元数作为复数集的拓广不满足数集扩展的必要性

有理数域是有序的但非完备的，实数域是有序且完备的。在保持有序又完备的要求下，实数域已经不能再扩张，即可证明精确有序同构，正好存在一个完备的有序域，序拓扑是有理数域及实数域的最自然的拓扑结构。由于复数域不是有序域，因而没有这种自然的序拓扑，但当引进复数的模，即把它距离化之后，就引进了复数域的一个拓扑（平面上的常用拓扑）。在这种拓扑结构下，复数域是一个完备域。因为复数的模式实数的绝对值的自然扩张，因而实数的序拓扑可以看成这个拓扑的一个子拓扑。正是由于这一点关于实分析的事实便可以自然而然地推广到复数域上去。反之，复分析解决了实分析中一些不清楚或者难以解决的问题。因而可以说复数域是保持了实数域的完备性要求而放弃了有序性要求的一个扩张。

对应原理的方法论意义不限于量子理论的发展，对应性是属性或关系范畴，包含对立和同一的类比性内涵，具有整体类比的意义。因此现代科学发展中新旧理论之间也普遍存在这种极限条件下的类比对应关系，这一原理也对提出新的理论和模型具有重要的启示和选择作用，为科学创新提出了一种制约性的要求，即任何理论的发展都必须是逻辑自洽的。数集的每一次扩展，总是由于原来的数集与解决具体问题的矛盾而引起的，这些问题有的是首先从实际中提出的，有些则是从数学本身首先提出的。为了使除法、减法运算封闭，从正整数集先后扩展到正有理数集合、有理数集合；为了表示无限不循环小数，引进了无理数，从有理数集合扩展到实数集；为了使开方运算封闭，引进了虚数，从实数集扩展到复数集。在复数集中加、减、乘、除、乘方、开方等所有代数运算都已封闭。退一步讲，假设四元数是复数集的拓广，那么开方运算失去意义，例如：∵$i^2=j^2=k^2=-1$，∴-1 的平方根至少有 6 个——±i、±j、±k，其实一个四元数的 n 次方根有无数个解，这样将使开方运算变为无定解运算。因此四元数域不应当看成数域的自然扩张。1970 年以后世界慢慢步入计算机时代，学科间就不断进行了整合，由于计算机的丰富性，所以很多以前不被理解和重视的理论又迎来了它们的春天，但是四元数也有它自身的局限性，四元数矩阵右特征值存在无限性，然而左特征值又存在不确定性，这些都阻碍了四元数的发展，并且在计算方面四元数矩阵也是繁琐的，所以四元数的研究的也是充满了困难。

科学的创新精神常常表现为对旧的传统观念的激烈冲击、批判和抗争，但变革创新并非毁灭传统，科学

既是一种批判性、革命性很强的文化形态，也是继承性、积极性很强的文化形态。因此玻尔及其对应原理堪称肯定传统理论中的真理成分及其价值，关注并解决新旧理论之间的继承关系的典范和构建物理理论的重要科学方法。历史的辩证的方法也表明:“今天被认为是合乎真理的认识都有它隐藏着的，以后会显露出来的错误的方面”。从对应原理我们可以得到这样的启迪，科学的发展过程是不断发现问题，排除错误，逼近正确认识的无止境的过程。是从常规科学经历反常和危机而引发的科学革命，再形成新的常规科学的无限演进过程。

2 把四元数作为复数集的拓广不满足数集的扩展原则

2.1 根据数集的扩展——原数集作为新数集的特例，原数集里的原有运算法则依然成立，即对应原理成立

当数集拓广至复数集后，人们迅速发现其在物理学中的应用——可以表示平面矢量及其加减运算，但是复数的乘法与矢量的乘法有着本质的区别，复数集对于乘法封闭且满足交换律，平面内向量的矢量积是一个空间矢量，数量积是一个标量，运算不封闭。模的定律也不成立，因此除法也就模棱两可；两个矢量的叉积是一个矢量，封闭性是保持的，但它又不满足交换律或结合律，并且模的定律也不成立，而且对两个非零因子，其积可以是零，这是一个哈密顿尤其希望避免的条件。复数的乘法有逆运算——除法，也有乘方、开方、指数、对数等运算，而矢量的数量积、矢量积、混合积、实数与矢量的积等都没有定义逆运算，也没有乘方、开方、指数、对数运算等，因此为了研究物理学中矢量乘法而拓广复数集是没有必要的，表示矢量乘法与普通乘法的符号亦应区别开来，不必定义 $i^2=j^2=k^2=-1$。矢量运算不同于代数运算，没有必要将其纳入代数运算。

若将三维矢量表示为 a+bi+cj，数量积与矢量积分别用“.”与“×”表示，$(a_1+b_1i+c_1j).(a_2+b_2i+c_2j)=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$，$(a_1+b_1i+c_1j)\times(a_2+b_2i+c_2j)=(b_1c_2-b_2c_1)+(c_1a_2-c_2a_1)i+(a_1b_2-a_2b_1)j$，从而把矢量乘法与普通乘法区别开来，又能作为复数集的拓广。其实这样做对表示矢量乘法非常妥当，但它会使普通乘法出现矛盾，复数集对于普通乘法已经封闭，乘积中出现的 ij、ji 无论怎样定义都会出现矛盾，而且与普通乘法的符号不加区别会造成混乱。

数是客观事物“量”的抽象，客观事物的多样性决定了数的种类的多样性；运算是客观事物“相互联系”的抽象，客观事物相互联系、相互作用的多样性决定了运算类的多样性。既然数及其运算是客观存在的，就一定存在其自身的发展规。我们只能对它们去认识而不能去约定。这就应遵循“认识论”的法则，即循环往复地由“特殊”到“一般”，再由“一般”到“特殊”逐步扩大对事物的认识，数系的拓广与运算类的扩充这二者必然密切联系起来方可走上正路。

2.2 在矢量 ai+bj+ck 中 i、j、k 的意义与复数 a+bi 中的 i 意义不同

在三维矢量 a**i**+b**j**+c**k** 中 **i**、**j**、**k** 是为了区分矢量在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量而作的标记，可以规定 $\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=1$ 等，但在复数 a+b**i** 中的 **i** 有着特殊的含义：$\mathbf{i}^2=-1$。在四元数 a**i**+b**j**+c**k**+d 中，当 d=0 时表示三维矢量，a、b、c 分别代表在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量，因此当 c=0 时，二维矢量应为 a**i**+b**j**，a、b 分别代表在 x 轴、y 轴上的分量，但单位不一致，前者为 **i**、**j**，后者为 1、**i**，而 $\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=-1\neq1$，因此这本身就具有一种不协调性。由于四元数乘法不满足交换律，且其纯虚部单位向量的乘法规则（$i^2=j^2=k^2=-1$）与复数中虚数单位 **i** 的定义存在根本性冲突，因此哈密尔顿四元数不能作为复数集的拓广。

2.3 历史上对于四元数的争议

四元数并没有像哈密顿预料的那样有用，它遵循大多数、并不是所有的普通代数规律，因此当时人们对四元数是否是兼容的仍存疑义。另外，四元数包含四个元素而不是三个，它们怎样应用于三维空间分析并不是显然的，四元数几何的特点仍然需要发现。四元数暗示了更高阶另外代数的可能性，那么这样一个代数能否被创造出来?所有这些问题在当时的英国数学家中都引起了强烈的轰动。在某种意义上，哈密顿的感觉是错误的，因为四元数的重要性从来没有像他所盼望的那样表现出来，四元数也没有成为数学家探索宇宙的一把钥匙。

历史上看，哈密顿提出四元数是由于数学界在三元数问题上的困惑而产生的，当时就有两派观点：到底四元数有用还是由它分离出的矢量分析有用？当时的工程师们拥护后者，认为四元数用处不大；四元数不是自然规律的产物而是人为的约定！而任何数学上的约定必需有强的"公信度"才行，更重要的是这个约定要由实践检验其正确性。四元数理论的根本缺陷是建立在这个数域上的函数缺少解析条件，解析条件是函数论的心脏，如果函数论缺少解析条件的话，不能成为一门数学。哈密顿工作的意义在于发现了矢量的运算理论以及三元数目前没有引入的必要。

泰特使哈密顿的四元数朝着物理应用的方向发展，在泰特的影响下，麦克斯韦在他著名的《电磁通论》中批判性的使用了四元数。19 世纪下半叶，吉布斯和亥维赛由于对麦克斯韦《电磁通论》的论文精选兴趣转而去阅读泰特所用的四元数，随着电磁理论的进一步发展，他们发现四元数作为描述物理问题的一个数学工具很不方便，于是他们在四元数的基础上进行了选择，创造了备受物理学家欢迎的现代意义下的矢量分析系统。麦克斯韦在《电磁通论》这本书中写到："在这个过渡时期，使用两种语言的方法可以把理论介绍和解释得更完美…但是他现在使用两种语言处理时，令人感到麻烦的是，至少可以发现 AB 的平方在笛卡尔系统中总是正的，而在四元数中却总是负的，并且当这个东西被偶然提及时你不知道它说的是哪一种语言…这也是不便的，比如说，当你讨论动能时为确保它是正值，必须插入一个符号。"麦克斯韦利用四元数表示电磁学方程组不成功，而矢量分析成功，就说明了四元数不是复数集的推广。

综上所述，历史上看哈密尔顿提出四元数是由于数学界在三元数问题上的困惑而产生的。当时就有两派观点：到底四元数有用还是由它分离出的矢量分析有用？当时的工程师们拥护后者，认为四元数用处不大；四元数的给出不是自然规律的产物而是人为的约定！而任何数学上的约定必需有强的"公信度"才行，更重要的是这个约定要由实践检验其正确性。第一个对四元数持反对意见的是当时名不经传的埃利(GB．Airy)。四元数比矢量具有更令人满意的代数特点，缺少了令人满意的几何特点，这给了埃利批评四元数的理由，他认为为四元数提供一个合理的几何解释是非常困难的。埃利的反对意见也许是对后来在四元数与矢量分析之间发生的一场争斗的预言。事实上，四元数的几何表达也同样令哈密顿苦恼。

四元数理论的根本缺陷是建立在这个数域上的函数缺少解析条件。解析条件是函数论的心脏，如果复变函数论缺少解析条件的话，不能成为一门数学吗。复数的乘法与矢量的乘法（无论内积，还是外积）有着本质的区别，哈密尔顿的四元数不能作为复数集的拓广，只不过他找到了矢量的乘法法则。

3 利用几何积代替四元数

1878 年英国数学家克利福德将格拉斯曼的外代数和哈密尔顿的四元数代数结合到一起，创立了几何代数(geometric algebra)。几何代数的核心贡献在于其对"坐标无关性"的坚持。传统的物理学往往依赖于特定的坐标系来描述物理量和方程。虽然坐标系在实际计算中必不可少，但它们有时也会掩盖物理定律的内在结构。几何代数能够以一种完全独立于任何坐标系或索引的语言表达基本物理定律，从而极大地提高了许多方程的清晰度和普适性。在现代科学中，数学工具与物理理论之间的交互构成了理解自然规律和复杂系统的核心基础。拓扑学与代数几何的结合体现了跨学科方法的强大效能。拓扑问题可以通过代数方法进行有效描述，这一转化依赖于代数拓扑理论中的同调与上同调结构，使得原本连续复杂的空间结构能够被离散代数对象描述。

在几何代数中，两个矢量的几何积定义为 **ab=a·b+a×b**，其中 **a·b** 是格拉斯曼的内积，**a×b** 是格拉斯曼的外积，类似哈密尔顿的四元数乘法包含标量积和矢量积。但是，克利福德代数克服了四元数代数只适用于三维矢量空间的局限以及其中的一些错误认识，它适用于任意维空间，几何积存在除法运算，但仅在非零元素且满足特定条件时成立，几何积的除法本质是 "乘法逆元的存在性"。

更重要的是，它发展了格拉斯曼的扩展的学问，对应任意 n 维矢量空间的克利福德代数是 2n 维的代数，而且具有强大的计算能力、紧致的表达能力。用它学习经典力学、电动力学、量子力学、相对论和规范场论，让人少了很多迷惑，推导的过程也简化许多。

为了满足数集的扩展原则，本研究分析表明取消四元数，直接利用矢量几何积。三维矢量表示为 **ai+bj+ck**，

为了与复数乘法相区别，定义 $\mathbf{i.i=j.j=k.k}=1$，这样可以避免运算结果中出现负号，其它的规则不变。$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$ 表示数量积（标量积），满足交换律；$(b_1c_2-b_2c_1)\mathbf{i}+(c_1a_2-c_2a_1)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}$ 表示矢量积（矢量积），不满足交换律。一句话狭义数集只包含复数集。

4 几何积代替四元数的意义

在传统的数学运算中，加法、减法被称为一级运算，乘法、除法被称为二级运算，指数、对数被称为三级运算。然而，是否存在更高级的运算，取决于具体的数学领域和问题。在某些高级数学和数学分支中，可能会有更复杂的运算和操作。例如在微积分中有导数、积分等运算；在代数学中，可能会涉及到更高级的代数结构和运算；在概率论中，有期望值、方差等运算。此外，随着数学的发展和新的研究领域的出现，可能会引入新的运算和概念。例如在现代数学的一些领域中，可能会有矩阵运算、张量运算、微分方程的求解等更复杂的操作。然而，具体是否存在更高级的运算，以及这些运算的定义和性质，会因数学领域和具体问题而异。不同的学科和研究方向可能会有自己特定的运算和操作。需要注意的是，运算的级别和复杂性是相对的，并且随着数学的发展和新的概念的引入，可能会有新的运算被定义和研究。

复数从提及到承认其合理性历经 100 多年，由复数的巨大理论和实践意义可以说，数学史上最严重的危机是在这 100 多年，故而复数的发现使实数观念发生了危机，这是第四次数学危机。数学之所以完美是因为数学有一个完备的复数系统；复数系统之所以完备是因为它的元素数不仅仅是一个记号，而且源于人类对自然界的抽象，带有宇宙的最基本信息，魏尔斯脱拉斯的“一个代数系如果服从乘积定律和乘法交换律，就是实数的代数和复数的代数"。新数集应是自然规律的产物，而不应是人为的约定；新数集的结论或保持与较低一级数集一致，或者为低数集的推广，数学发展的方向就是运算类的扩充与数域的拓广[19-23]。可见数学美不是人类构造出来的，而是完美宇宙的真实映象。寻找宇宙的最基本信息是重要的，因为它有助于我们发现表达“适用于一切事物的理论”的数学形式，反过来，我们也可以从宇宙的最基本信息出发去思考宇宙的造化。

通过几何积，向量的内积（数量积）和外积（向量积）不再是两个独立的运算，而是同一操作的两个侧面。这种统一不仅简化了数学形式，更重要的是，它揭示了隐藏在物理量背后的深层几何意义。例如，两个向量的外积不再仅仅是一个垂直于它们的向量，而是一个“双向量”（bivector），它代表了这两个向量所张成的平面区域，其方向性也更加明确，避免了传统向量积在三维空间中引入的右手定则的任意性。这种从一开始就强调图形表示和基础代数规则的方法，使得读者能够以更加直观的方式把握几何代数的精髓。

吴健雄认为：“进步道路上的绊脚石是，也一向是不容怀疑的传统。”科学美是指在各种科学方法及科学理论中所蕴含着的众多美的形态(方式、结构、图象等)和美的价值，它是从科学研究的层面上所反射的现实美的光辉及其美的价值的统一体。自然界是美的，正确反映自然界运动规律的科学理论也必然是美的。在历史上，以追求理论的完美结构作为自己科学创造的原动力的科学家不乏其人，因此美的因素不但反映在科学理论的内容上，也渗透在科学理论体系的结构和表述之中。虽然科学理沦不具备具体形象，但科学家在欣赏某一科学理论所产生的美感，不亚于艺术家欣赏一艺术作曲或或自然某一奇观时所产生的快感。彭加勒在谈沦数学美时曾作过这样的生动描述：“数学家由此获得类似于绘画和音乐所给予的乐趣。⋯⋯他们惊叹不已，他们感到美的特征，尽管感官没有参与。他们难道不乐在其中吗?”显然数学家之所以乐在其中，盖因科学美使然。

5 结束语

本文从数集扩展的原则性要求出发，论证了将四元数视为复数自然推广的传统观点存在根本缺陷。四元数的乘法规则与复数不兼容，且其单位向量的几何意义与运算规则存在内在矛盾。克利福德代数框架下的几何积为解决矢量运算提供了一个更自洽、更通用的数学语言，它清晰地分离了不同种类的乘法，并自然地扩展到高维空间。未来工作可侧重于探讨几何积在具体物理问题或工程计算中替代四元数的可行性与优势。

参考文献

[1] 李文亮.四元数矩阵[M].长沙:国防科技大学出版社,2002.06.

[2] 姜同松,陈丽.四元数体上矩阵的广义对角化.应用数学和力学,1999,20(11):1203-1210.
[3] 陈龙玄.四元数矩阵的特征值和特征矢量.烟台大学学报,(自然科学与工程版),(3)(1993),1-8.
[4] 谢邦杰.四元数自共轭矩阵与行列式.吉林大学自然科学学报.2(1980),19-34.
[5] 谢邦杰.体上矩阵的有理简化形式与 Jordan 形式的唯一性问题.吉林大学自然科学学报,1978,1:107-116.
[6] 庄瓦金.体上矩阵理论导引[M].北京:科学出版社,2006.06.
[7] 黄礼平.四元数矩阵的特征值与奇异值估计.数学研究与评论,1992,12:449-454.
[8] 黄礼平.体上矩阵可中心化的判别定理.数学进展,1998,27:526-532.
[9] 李祥明.四元数矩阵理论中的几个概念间的关系.数学学报,1998,41:283-289.
[10] 李祥明.关于矩阵奇异值分解的注记.数学研究,2000,20:311-312.
[11] 庄瓦金.四元数体上的矩阵方程.数学学报,1987,30:688-694.
[12] 庄瓦金.四元数矩阵的特征值与奇异不等式.数学进展,1988,17:403-407.
[13] 刘建洲.四元数体上的矩阵及其优化理论.数学学报,1992,35:831-838.
[14] Zhuang W J.Generalized inverse classes of subblocks of inverse matrices for nonsingular bordered matrices over a skew field.Northeastern Math J,1990,6:310-316.
[15] Huang L P.The matrix equation over the quaternion field.Lin Alg Appl,1996,234:197-208.
[16] 《数学史概论》.〔美〕H.伊夫斯着欧阳绛译.山西人民出版社,1986 年 3 月:458.
[17] 《大学数学》.〔美〕E.克拉默着舒五昌,周仲良编译.复旦大学出版社,67-77.
[18] 曹则贤.学得浅碎不如无——四元数、矢量分析与线性代数关系剖析.物理,2020（10）:681-687.
[19] 李学生.数学归纳法的拓广.济南教育学院学报,2002 年第 4 期:134-136.
[20] 李学生.动量守恒定律与角动量守恒定律的协变性疑难.国际教育学,2025 年第 7 卷第 7 期:30－38.
[21] 刘明成.对一道困扰中国力学教学 40 多年习题的思考.2025 年全国高等学校物理基础课程教育学术研讨会论文集.清华大学出版社,2025 年 7 月:20—27.
[22] 李学生.理想流体伯努利方程的协变性初探.科学发展研究,2025 年第 5 卷第 6 期:83-92.
[23] 刘明成.电子的电磁质量不是引力质量的一部分[C].2025 物理与工程前沿教育教学创新研讨会暨大学物理 MOOC 联盟工作会会议论文集,71-77.