剖析翻折链环，跃升多解思维

潘思源[1,2]

[1]扬州大学数学科学学院　江苏扬州
[2]苏州工业园区东沙湖小学　江苏苏州

【摘要】翻折变换是初中几何的核心载体，对发展学生空间观念与逻辑推理能力具有关键价值。本文以一道中考双重翻折几何问题为研究对象，通过系统剖析多元解法的思维路径，揭示几何知识网络的内在关联，为培养学生直观想象、逻辑推理等核心素养提供实践支撑，推动几何思维的进阶发展。

【关键词】翻折变换；几何问题；一题多解；核心素养

【收稿日期】2025 年 5 月 14 日 【出刊日期】2025 年 6 月 18 日　【DOI】10.12208/j.aam.20250018

Analysis of reflection chain rings elevating multi-solution thinking

Siyuan Pan[1,2]

[1]*College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu*
[2]*Dongshahu Primary School of Suzhou Industrial Park, Suzhou, Jiangsu*

【Abstract】 Reflection transformation is a core component of middle school geometry, playing a critical role in developing students' spatial awareness and logical reasoning skills. This study examines a geometric problem involving double reflection from a secondary school entrance exam. By systematically analyzing the thought processes underlying diverse solutions, it reveals the intrinsic connections within geometric knowledge networks. The paper provides practical support for cultivating key competencies such as intuitive imagination and logical reasoning while promoting the advanced development of geometric thinking.

【Keywords】 Reflection transformation; Geometric problem; Multiple solutions; Key competencies

翻折变换作为初中几何的核心内容，蕴含对称性、不变性及构造思想，对锤炼学生空间想象能力与逻辑推理能力至关重要。本文聚焦一道双重翻折几何计算题，通过试题解析与多解思路探究，系统梳理从相似模型、定理应用到代数方法的多元解法路径，旨在揭示几何知识的内在联系，促进学生几何思维的进阶与深化。

1 试题呈现

（2025 苏州三区一模）如图 1，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle B=90°$，$AB=4$，$BC=3$，先将 ΔABC 沿 AC 翻折到 $\Delta AB'C$ 处，再将 $\nabla AB'C$ 沿 AB' 翻折到 $\Delta AB'C'$ 处。过点 C 作 $CD//AB$ 交 AC' 于点 D，则 CD 的长是____________。

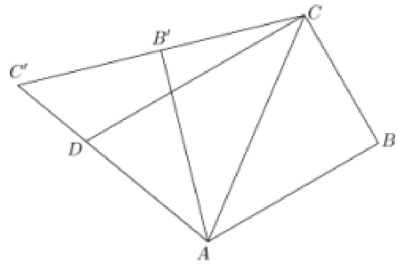

图 1

2 试题分析

本题是以直角三角形两次翻折变换为背景的经典几何题，主要考察翻折的对称性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理、三角函数及角平分线定理的综合运用。试题根据《义务教育数学课程标准（2022 年版）》要求，着重促进学生的直观想象、逻辑推理、数学运算、数学建模等核心素养的发展。

本题的条件特点与解题视角存在明确关联，多条件协同推动不同解题视角的切入，形成了多元解法的逻辑起点。$\angle B=90°$，$AB=4$，$BC=3$，这一直角及边长条件，为勾股定理应用、坐标系建立、面积计算奠定基础，同时为构造“K 字型”、“母子型”相似模型创造条件。“两次翻折”的对称属性，通过对应角、对应边相等，为三角函数运算、角平分线定理应用及相似三角形的等角判定提供依据，更以对称关系指引辅助线构造思路[1]。$CD//AB$ 借助“等角转化”和“比例转化”，衔接翻折隐含条件与平行显性关系，为相似判定、等腰三角形构造、矩形构造、线段比例架起桥梁。

3 解法探究

3.1 相似模型筑基，比例关系破题

解法 1 构造“A 字型”相似

如图 2，延长 AB,CC' 交于点 E。

易证 $\Delta EBC∽\Delta EB'A$，有 $\frac{BE}{B'E}=\frac{EC}{EA}=\frac{BC}{B'A}=\frac{3}{4}$。设 $BE=3a,B'E=4a,$ 则 $EC=4a-3,EA=3a+4$。由 $\frac{EC}{EA}=\frac{3}{4}$，代入解得 $a=\frac{24}{7}$，则 $AE=\frac{100}{7},C'E=\frac{117}{7}$。

由 $DC//AE$，得“A 字型”相似：$\Delta C'DC∽\Delta C'AE$，有 $\frac{DC}{AE}=\frac{C'C}{C'E}$，代入解得 $CD=\frac{200}{39}$。

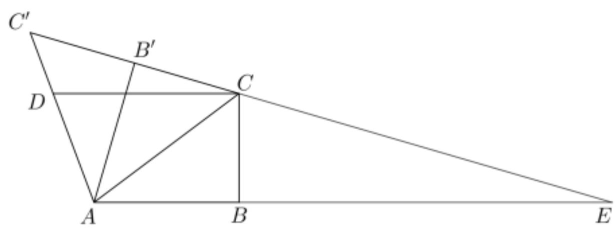

图 2

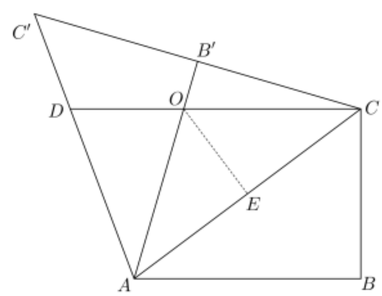

图 3

解法 2 构造“母子型”相似

如图 3，CD 与 AB' 交于点 O，过点 O 作 $OE\perp AC$ 交 AC 于点 E。

由 $DC//AB$ 和翻折易知 ΔOAC 是等腰三角形。又因为 $OE\perp AC$，故 E 是 AC 中点，则 $AE=EC=\frac{1}{2}AC=\frac{5}{2}$。根据 $OE\perp AC$ 得“母子型”相似：$\Delta AOE∽\Delta ACB'$，得 $\frac{AO}{AC}=\frac{AE}{AB'}=\frac{5}{8}$，解得 $OA=\frac{25}{8}$，故 $OC=\frac{25}{8}$。

由“母子型”相似：$\Delta ADO∽\Delta CDA$，有 $\frac{OD}{AD}=\frac{AD}{CD}=\frac{AF}{AC}=\frac{5}{8}$。设 $OD=5a$，$DA=8a$，$CD=5a+\frac{25}{8}$，由 $\frac{OD}{AD}=\frac{AD}{CD}$，代入得解得 $OD=\frac{5\cdot 125}{8\cdot 39}$。故 $CD=\frac{200}{39}$。

解法 3 构造“8 字型”相似

设 $OB'=x$，由解法 2 知 $OA=OC$。易知 $OA=OC=4-x$。在 $Rt\Delta OB'C$ 中，$x^2+3^2=(4-x)^2$，解得 $x=\frac{7}{8}$，

故$OB'=\frac{7}{8}$，则$OA=OC=\frac{25}{8}$。

如图 4，取DC中点E，由翻折知B'是CC'中点。在$\Delta CC'D$中，B'是CC'中点，E是CD中点，故$B'E//CD$。

根据$B'E//C'A$得“8 字型”相似：$\Delta OEB'$∽ΔODA，有$\frac{OE}{OD}=\frac{B'O}{AO}=\frac{7}{25}$。设$OE=7k$，$OD=25k$，则$DE=EC=32k$，故$OC=39k=\frac{25}{8}$，解得$k=\frac{25}{8\cdot 39}$。代入得$CD=64k=\frac{200}{39}$。

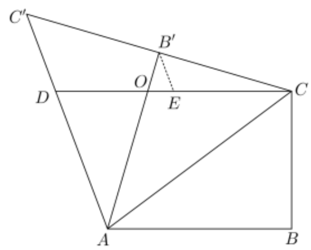

图 4

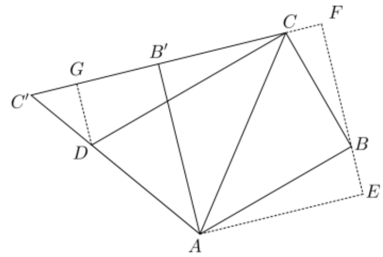

图 5

解法 4 构造“K 字型”相似

如图 5，作$BE\perp AE$交于点E，作$BF\perp CF$交于点F，过点D作$DG\perp CC'$。

由“K 字型”相似：ΔAEB∽ΔBFC，有$\frac{AE}{BF}=\frac{BF}{CF}=\frac{AB}{BC}=\frac{4}{3}$。设$AE=4x$，$BF=3x$，$BF=3x$，$CF=3y$，有$\begin{cases}3y+3=4x① \\ 3x+4y=4②\end{cases}$，由 3①+4②，得$\frac{x}{y}=\frac{24}{7}$。

由“K 字型”相似：ΔCDG∽ΔBCF，有$DG:CG:CD=y:x:1=7:24:25$。由$DG//AB'$，得$\Delta DGC'$∽$\Delta AB'C'$，有$DG:GC':C'D=4:3:5$。设$DG=28a$，则$CG=96a$，$GC'=21a$，$CD=100a$。故$CC'=117a=6$，解得$a=\frac{2}{39}$，故$CD=100a=\frac{200}{39}$。

评析：本思路以相似三角形为核心，通过构造“A 字型”“母子型”“8 字型”“K 字型”经典模型，将翻折条件转化为比例关系。其优势在于逻辑链条清晰，直接依托翻折生成的等角与平行条件，属于通性通法。解法 1 步骤简洁，适合基础教学。解法 2 需结合等腰三角形性质，强化推理层次。解法 4 计算稍繁，但体现垂直条件的灵活转化。教学中可重点引导学生根据图形特征选择模型，避免机械套用[2]。需额外说明的是，后续角平分线定理、三角函数、坐标系等解法虽切入点不同，但均以翻折生成等角为基础条件，与本部分相似模型解法的条件转化逻辑存在内在关联，共同体现了几何解题中“从已知条件提炼核心关系”的共性思想。

3.2 角平分线为引，分线段之比为据

解法 5 角平分线定理

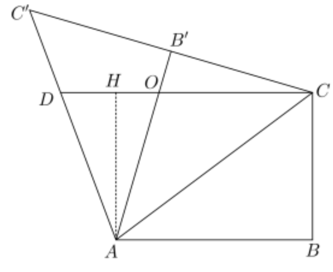

图 6

如图 6，作 $AH \perp CD$ 交 CD 于点 H，AB' 交 CD 于点 O。

设 $OH = x$。易证四边形 $ABCH$ 是矩形。由解法 2 知 $OA = OC$，故 $OC = OA = 4 - x$。在 $Rt\Delta AHO$ 中，$AH^2 + OH^2 = AO^2$，代入解得 $x = \dfrac{7}{8}$，故 $OC = 4 - \dfrac{7}{8} = \dfrac{25}{8}$。

设 $DH = y$。在 $Rt\Delta AHD$ 中，有 $OA = \sqrt{y^2 + 9}$。由翻折知 $\angle B'AC = \angle B'AC'$，故 AO 是 $\angle DAC$ 的角平分线。根据角平分线定理，有 $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{OD}{OC}$，代入解得 $y = \dfrac{44}{39}$，$y = -4$（舍去）。故 $DH = \dfrac{44}{39}$，得 $CD = DH + HC = \dfrac{44}{39} + 4 = \dfrac{200}{39}$。

评析：解法 5 立足翻折的本质是对称轴即角平分线，直接应用角平分线定理分割线段。其亮点在于跳过复杂相似构造，通过定理建立比例方程，简化思维路径，体现了“从角的性质切入，以定理简化运算”的转化思想。需注意的是，此方法虽以角平分线定理为核心，但其应用前提是识别出 AO 是 $\angle DAC$ 的角平分线，仍需依托翻折对称性带来的等角关系，而这种等角关系恰是前 4 种相似模型解法中证明相似的关键条件，与“利用等角证相似”的核心思想一脉相承，并非完全独立的解题路径。这一关联也体现了几何解题中“条件转化”的共性，对学生挖掘隐含条件、灵活选用定理的能力提出了更高要求。

3.3 倍长中线拓域，巧构新相似破局

解法 6 倍长中线构造新相似

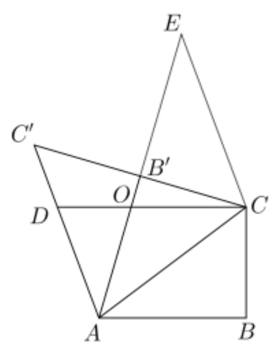

图 7

由解法 3 知 $OB' = \dfrac{7}{8}$，$OA = OC = \dfrac{25}{8}$。

如图 7，延长 AB'，使 $AB' = BE$，联结 EC，易证 $\Delta AB'C' \cong \Delta EB'C$。又由翻折知 $\Delta EB'C \cong \Delta AB'C'$，易知 $CE // AD$。

根据 $CE // AD$，由“8 字型”相似得：$\Delta EOC \sim \Delta AOD$，有 $\dfrac{EO}{AO} = \dfrac{OC}{OD}$，代入解得 $OD = \dfrac{625}{312}$。故 $DC = DO + OC = \dfrac{625}{312} + \dfrac{25}{8} = \dfrac{200}{39}$。

评析：解法 6 的核心在于“辅助线构造”的创新性。通过倍长中线，延长 AB'，使 $AB' = BE$，将分散的线段 EC 与 AD 通过全等三角形关联，再借 $CE // AD$ 构造新的 8 字型相似。这种思路打破了原图形的局限，通过补形将隐性的平行关系与翻折对称性质结合，使原本孤立的线段纳入可量化的比例中，展现了辅助线拓展图形边界，重组条件关联的作用，培养学生跳出原图找联系的发散思维，是构造性思维在几何解题中的典型体现。教学中可作为思维拓展案例，强调图形补全在破解复杂问题中的独特价值。

3.4 三角工具为桥，边角关系转化

解法 7 三角函数法

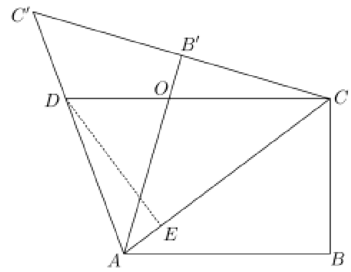

图 8

作 $DE \perp AC$ 交 AC 于点 E，AB' 与 DC 交于点 O。

设 $\angle CAB=\theta$，易得 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$。由解法 3 知，$OB'=\dfrac{7}{8}$，$OC=\dfrac{25}{8}$。在 $Rt\Delta DEC$ 中，$\tan\theta=\dfrac{DE}{EC}=\dfrac{3}{4}$。设 $DE=3k$，$EC=4k$。在 $Rt\Delta OB'C$ 中，$\tan\angle B'OC=\tan 2\theta=\dfrac{B'C}{B'O}=\dfrac{24}{7}$。在 $Rt\Delta DAE$ 中，$\tan\angle DAE=\tan 2\theta=\dfrac{DE}{AE}=\dfrac{3k}{AE}$。故 $\dfrac{3k}{AE}=\dfrac{24}{7}$，$AE=\dfrac{7}{8}k$。由 $AE+EC=\dfrac{7}{8}k+4k=5$，解得 $k=\dfrac{40}{39}$，故 $DE=\dfrac{120}{39}$。在 $Rt\Delta DEC$ 中，$\sin\angle DEC=\sin\theta=\dfrac{DE}{DC}=\dfrac{3}{5}$，代入解得 $CD=\dfrac{200}{39}$。

评析：解法 7 以三角函数为核心工具，紧扣翻折变换对应角相等的本质，通过构造直角三角形，借助正弦、正切建立边角关系。其关键在于利用翻折生成的等角，使同一角度的三角函数在不同直角三角形中保持一致。相较于相似模型的“比例转化”，三角函数法更直接聚焦角、边的量化关联，尤其适合含多个直角三角形且角度同一的问题。这种方法不仅为学生提供了新的解题视角，拓宽了策略选择的维度，更在用三角函数表达式刻画边角关系的过程中，提升了将几何直观转化为代数运算的思维品质。

3.5 坐标为纲，代数解形

解法 8 建立平面直角坐标系

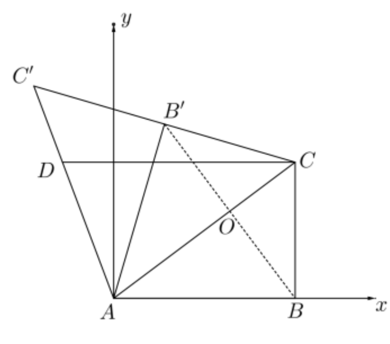

图 9

如图 9，以点 A 为原点，AB 为 x 轴，过点 A 垂直于 x 轴作 y 轴，得 $A(0,0)$，$B(4,0)$，$C(4,3)$，$D(x,3)$。联结 BB'。

易得 $l_{AC}:y=\dfrac{3}{4}x$，$l_{BB'}:y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{16}{3}$。由 l_{AC} 与 $l_{BB'}$ 交于点 O，解得 $x=\dfrac{64}{25}$。故点 $O(\dfrac{64}{25},\dfrac{48}{25})$。由 B 与 B' 关于点 O 对称，易得点 $B'(\dfrac{28}{25},\dfrac{96}{25})$。由 C 与 C' 关于 B' 对称，易得点 $C'(-\dfrac{44}{25},\dfrac{117}{25})$。代入计算得 $l_{AC'}:y=-\dfrac{117}{44}x$。由点 D 在 $l_{AC'}$ 上，且 $D(x,3)$，得 $-\dfrac{117}{44}x=3$，解得 $x=-\dfrac{44}{39}$，$D(-\dfrac{44}{39},3)$。因此，

$CD=4-(-\frac{44}{39})=\frac{200}{39}$。

评析：本思路将几何问题代数化，以坐标系为载体，将翻折的“对称性”转化为坐标的“对称变换”，将垂直关系转化为斜率乘积为-1 的代数条件，将线段长度转化为两点间距离公式的运算。这种方法凸显了用代数语言描述几何关系的数学建模思想，既锻炼了学生的坐标转化能力，又体现了数与形的辩证统一。

3.6 面积衡隐，线显真长

解法 9 面积法

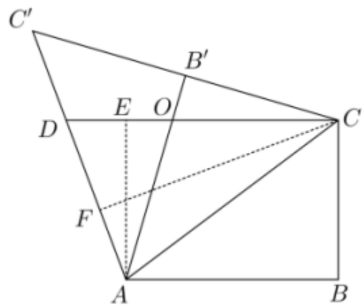

图 10

如图 10，作 $AE\perp CD$ 交 CD 于点 E，作 $CF\perp AD$ 交 AD 于点 F。

在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\sin\angle ACB=\frac{4}{5}$。由翻折知 $\sin\angle C'=\sin\angle ACB=\frac{4}{5}$，$BC=B'C=B'C'=3$。在 $Rt\Delta C'CF$，$CC'=6$，$\sin\angle C'=\frac{4}{5}$，故 $CF=CC'\cdot\sin\angle C'=6\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{5}$。由解法 5 知四边形 $ABCE$ 是矩形，有 $AE=BC=3$。

在 ΔACD 中，有 $\frac{1}{2}DC\cdot AE=\frac{1}{2}AD\cdot CF$，代入得 $\frac{AD}{CD}=\frac{5}{8}$。设 $AD=5a$，$CD=8a$，$DE=8a-4$。在 $Rt\Delta ADE$ 中，$AE^2+DE^2=AD^2$，代入解得 $a=1$ 或 $a=\frac{25}{39}$。故 $AD=5$（舍去）或 $AD=\frac{125}{39}$，所以 $CD=8a=\frac{200}{39}$。

评析：以面积为隐性等量关系的媒介，将未知线段 CD 转化为三角形的底边，以面积作为中间桥梁，通过构造矩形关联线段，结合面积公式建立等式，避开复杂的相似或定理推导，直接通过面积关系求出线段长度，过程简洁直观，体现了面积作为隐性线段桥梁的实用价值。

4 教学启示

4.1 重模型，更重建模

几何解题中，相似模型、角平分线定理等工具是重要基础，但教学的核心并非让学生机械记忆模型，而是引导其学会掌握“从条件到模型”的构建逻辑。在平时教学中，师生共同归纳总结常见的相似模型，深刻理解模型的关键条件，有助于学生在遇见图形时展开丰富的模型联想，从而主动构建模型，让所添辅助线更具目的性[3]。从而避免学生见题套模型的思维惰性，培养“用条件生长模型”的主动建构能力，强化学生数学建模意识。

4.2 融解法，亦融素养

多元解法的价值不仅在于一题多解，更在于其背后核心素养的协同发展。思路 1 培养逻辑推理与直观想象，思路 2 强化逻辑推理与直观想象，思路 3 深化直观想象与逻辑推理，思路 4 提升数学运算与数学建

模。在教学过程中，教师需要引导学生以主体的身份参与进来，让学生在“思中学、学中做、做中思”的过程中成长，鼓励和引导学生不断思考、探究多种解题方法，充分激发学生内在的学习兴趣[4]。引导学生在解法融合中理解“几何推理与代数运算”“直观想象与逻辑推理”的互补性，实现从“会解题”到“会思考”的进阶。

4.3 探本质，再探迁移

翻折变换的本质是对称不变性，即翻折前后对应角相等、对应边相等、对称轴垂直平分对应点连线，这一本质是串联多元解法的核心线索。教学中需引导学生穿透具体解法的表象，深挖对称不变性与条件的关联。 在此基础上，需强化本质的迁移应用，从直角三角形的双重翻折，拓展至矩形沿对角线翻折、菱形沿对称轴翻折等问题，引导学生运用对称不变性分析新情境中的对应关系。从翻折变换延伸至轴对称作图、最短路径问题，让学生体会对称本质在不同几何领域的贯通性[5]。培养学生抓本质解一类题的迁移能力，实现从“解一道翻折题”到“通一类对称问题”的思维跃升。

参考文献

[1] 张灿灿.联想基本图形 演绎由“形”构“型”——对一道矩形翻折题以及变式的分析及探索[J].初中数学教与学,2024,(24):32-35.

[2] 郭红艳.一题多解拓思维 构造平行解难题[J].中学数学教学参考,2024,(18): 50-51.

[3] 李清强.构建基本模型 巧解几何问题[J].中学数学教学参考,2020,(23):57-59.

[4] 何璇.核心素养理念下的“一题多解”教学探究[J].初中数学教与学,2025,(04):37-39.

[5] 裴姣.聚焦知识结构 成就深度学习——对一道正方形翻折问题的探究[J].初中数学教与学,2024,(02):27-29.