把未知当已知，领略数学之魅

赵 阳

扬州大学 江苏扬州

【摘要】在解决函数和方程问题时，题设常以特定符号预设变量关系，而在惯性思维的影响下，学生常常会以固定的符号，如 x，t 等为未知量或者解题时执着于结论推导，导致思路受限.本文通过典型案例分析，提出一种创新思维策略：将未知条件视为已知参与推导，或将目标结论作为已知辅助解题.该方法能有效突破思维定式，简化解题流程，并为数学思想的教学提供新视角。同时本文还对如何在教学中系统实施该策略提出可行建议，包括教师教学引导和学生反思训练与两个维度，为数学课堂注入更具启发性的思维训练方式。

【关键词】函数与方程；思维定势；变量转换

【收稿日期】2025 年 2 月 18 日 【出刊日期】2025 年 3 月 18 日 【DOI】10.12208/j.aam.20250009

Treat the unknown as the known and appreciate the charm of mathematics

Yang Zhao

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【**Abstract**】When solving problems related to functions and equations, the problem settings often presuppose variable relationships through specific symbols. However, under the influence of inertial thinking, students tend to use fixed symbols, such as x, y, etc., as unknowns or be obsessed with the derivation of conclusions during problem-solving, which limits their thinking. Through the analysis of typical cases, this paper proposes an innovative thinking strategy: treating unknown conditions as knowns to participate in the derivation, or taking the target conclusion as a known to assist in problem-solving. This method can effectively break through the thinking pattern, simplify the problem-solving process, and provide a new perspective for the teaching of mathematical thinking. At the same time, this paper also puts forward feasible suggestions on how to systematically implement this strategy in teaching, including two dimensions: students' reflective training and teachers' instructional guidance, to inject more inspiring thinking training methods into mathematics classrooms.

【**Keywords**】Functions and equations; Thinking set; Variable transformation

函数与方程思想是常见的数学思想之一，在高考中所占比重较大，综合知识多以及题型种类多样，解题方法也是多种多样。传统教学中，教师常强调“抓住未知量”的解题模式，易使学生陷入机械化的思维定式。若将未知条件或目标结论视为已知参与推导，可将复杂问题转化为熟悉模型，显著降低思维难度。2017 年颁布的《普通高中数学课程标准》当中强调要培养学生的发散思维，如果学生在解答完函数方程问题时，教师引导学生抓住未知不放，可能会导致学生形成思维定势，如果把要求的结论当成已知参与到解题活动当中，有时会达到事半功倍的效果，同时也对学生的解题能力大有提升[1]。本文结合几种典型例题，系统阐述该思想的应用场景与实施路径。

1 圆上动点的最值问题

例 1 已知实数 x, y 满足 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$，求 $x-y$ 的最大值

解：由题意可知 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$，即 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$，其几何意义是以 (2.1) 为圆心，

半径为 3 的圆。令$a=x-y$，变形可得$x-y-a=0$，其几何意义为直线$x-y-a=0$，因为x,y满足$x^2+y^2-4x-2y-4=0$所以直线$x-y-a=0$与圆$(x-2)^2+(y-1)^2=9$有公共点，所以圆心到直线的距离$d\le 3$，即$\frac{|2-1-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}\le 3$可解得$1-3\sqrt{2}\le a\le 1+3\sqrt{2}$，当$a=x-y=1+3\sqrt{2}$时，可解得$x=2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$y=1-\frac{3\sqrt{2}}{2}$，此时$x,y$满足题目方程$x^2+y^2-4x-2y-4=0$，符合题意，所以当$\begin{cases}x=2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ y=1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}$时，$a_{\max}=1+3\sqrt{2}$

例 2 已知点(x,y)在圆$x^2+(y-1)^2=1$上运动

（1）求$\frac{y-1}{x-2}$的最大值

（2）求$2x+y$的最大值和最小值

解：（1）令$k=\frac{y-1}{x-2}$，整理得到：$kx-y-2k=0$，由$1\ge\frac{|-1-2k+1|}{\sqrt{1+k^2}}$计算得出$-\frac{\sqrt{3}}{3}\le k\le\frac{\sqrt{3}}{3}$，当$k=\frac{y-1}{x-2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，代入圆的方程可以解得符合条件的$(x,y)$为$x=\frac{1}{2},y=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，，所以当$x=\frac{1}{2},y=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$k$可以取得最大值$\frac{\sqrt{3}}{3}$，当$k=\frac{y-1}{x-2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$时，同理代入圆的方程解得符合条件的$(x,y)$为$x=\frac{1}{2},y=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，综上可以得到当$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$时，$k_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，当$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$时，$k_{\min}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

（2）令$b=2x+y$，整理得$2x+y-b=0$，由$1\ge\frac{|1-b|}{\sqrt{5}}$计算得出$1-\sqrt{5}\le b\le 1+\sqrt{5}$，由（1）同理可以解得：当$\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ y=1+\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$时，$b_{\max}=1+\sqrt{5}$，当$\begin{cases}x=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ y=1-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$时，$b_{\min}=1-\sqrt{5}$

反思：这两题都是求函数的最值问题，此类最值问题由于缺乏标准化求解步骤，学生在初见时往往难以快速切入求解思路。但如果把要求的结论当成已知参与到思考当中很快就可以联想到这是过定点的直线与圆有交点，就把此题转化为求圆心到直线的距离问题，变成了学生熟悉的问题。经过多次的归纳总结，自然而然的就会学到这种思想方法，从而快速准确地解决问题。类似这样的问题，经过多次的归纳总结，学生就会不自觉地学习到这种化归的思想，从而举一反三，使之思维活跃，思路开阔，对其以后的学习和工作都有莫大的帮助[2]。

综上所述，这类“最值问题”的求解可以借助“目标变量视为已知”的策略，并通过与几何条件的结合，

有效简化模型求解过程。下面我们将进一步讨论该思想在代数方程求根当中的应用。

2 高次方程根的分析问题

例 3 设 $f(x)=(1+a)x^4+x^3-(3a+2)x^2-4a$，证明对所有不同的 a，方程 $f(x)=0$ 有共同的实根

解：$f(x)=(1+a)x^4+x^3-(3a+2)x^2-4a=x^4+ax^4+x^3-3ax^2-2x^2-4a$

$=\left(x^4-3x^2-4\right)a+x^2(x^2+x-2)=(x-2)(x+2)(x^2+1)a+x^2(x+2)(x-1)$

要求方程的根，那么令 $f(x)=0$，即有 $\begin{cases}(x-2)(x+2)(x^2+1)=0\\(x+2)(x-1)=0\end{cases}$，首先对于 $(x-2)(x+2)(x^2+1)=0$ 可得该方程的根有 $x=2,-2,-i.+i$，其次 $(x+2)(x-1)=0$ 可得该方程的根有 $x=-2,1$，综上可得该方程有 $x=-2$ 这一个共同的实根。

反思：学生的惯性思维大部分情况下都会把 x 当成未知量也就是自变量来看，但是此题如果把 x 当成未知数的话需要解一个一元四次方程，学生并没有系统学习过高次方程的解法，而且本题当中还含有参数 a，按照常规的解法进行移项，化简，因式分解会比较复杂繁琐，但如果我们转变思维把 a 当成未知量，x 当成已知量，通过化简，把该方程转化为一次方程 $ka+b=0$ 的形式，再通过因式分解，就能够解得该方程的根。

变式 设 $k\geq 9$，解方程 $x^3+2kx^2+k^2x+9k+27=0$

解：设 $f(x)=x^3+2kx^2+k^2x+9k+27$，令 $f(x)=0$ 即 $x^3+2kx^2+k^2x+9k+27$ $=k^2x+k(2x^2+9)+(x^3+27)=(k+x+3)(xk+x^2-3x+9)=0$，所以该方程的根 $x_1=-k-3$，另外的根为方程 $xk+x^2-3x+9=0$ 的根，因为 $k\geq 9$ 所以该方程有两个根，分别为 $x_2=\dfrac{3-k+\sqrt{k^2-6k-27}}{2}$

$x_3=\dfrac{3-k-\sqrt{k^2-6k-27}}{2}$

反思：与例二相同，该方程是一个一元三次方程，同样含有参数 k，但是把 k 当成未知数，x 当成常数来解题，该方程就变成了以 k 为未知数的一个一元二次方程，通过因式分解可以快速的求出方程的解。两题虽然形式不同，但是所用的思想都是把未知看成已知的思想。

综上所述，这类“求高次方程根的问题”同样也可以借助“把未知变量当成已知的”思想来进行思考，打破惯性思维。同时这种思想也可以运用到函数求值域的问题当中，接下来进行进一步的探讨。

3 函数值域和最值问题

例 4 x 是实数，求函数 $y=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-2x+6}$ 的值域

解：因为 $x^2-2x+6\geq 0$ 恒成立，所以该函数的定义域为 R。

$y=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-2x+6}$ 通分化简得 $(y-1)x^2-(2y+1)+6y+1=0$，那么该函数就化简成关于 x 的一元二次方程，其中 y 当成常数来考虑，就有如下过程：

当 $y=1$ 时，解得 $x=\dfrac{7}{3}$

当 $y\neq 1$ 时，因为 x 是实数，所以上述一元二次方程有实数解，那么就有 $\Delta=\left[-(2y+1)^2\right]-4(y-1)(6y+1)\geq 0$，解得 $\dfrac{6-\sqrt{61}}{10}\leq y\leq\dfrac{6+\sqrt{61}}{10}$ 且 $y\neq 1$。综上可得，函数的值域为

$\dfrac{6-\sqrt{61}}{10}\leq y\leq\dfrac{6+\sqrt{61}}{10}$

反思：该题是求值域的问题，要求 y 的取值范围，显然 y 是未知的，但解题思路和例 3 类似，把 y 看成已知的，该题就转化成了一元二次方程有解的条件问题。那么该题的一般形式是：x 是实数，求 $y=\dfrac{ax^2+by+c}{dx^2+ex+f}(dx^2+ex+f\neq 0)$ 的值域，此类题型的具体解题思路是：首先要讨论函数的定义域，然后把未知量 y 看成已知的，题目转化成一元二次方程是否有解的讨论，即把函数式转化成关于 x 的一元二次方程 $(yd-a)x^2+(ye-d)x+yf-c=0$，判断判别式 $\Delta=(ye-b)^2-4(yd-a)(yf-c)\geq 0$，通过解关于 y 的不等式来确定函数值域[3]。

例 5 x 是实数，求函数 $y=\sqrt{2+x^2}-\dfrac{1}{2}x$ 的最小值

解：（解法一）对于函数 y 求导可得到 y 的导数为 $y'=\dfrac{2x-\sqrt{2+x^2}}{2\sqrt{2+x^2}}$，令 $y'=0$，可解得 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以函数 y 在 $x\leq\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 时单调递减，在 $x\geq\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 时单调递增，因此当 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 时，y 取得最小值，$y_{\min}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

（解法二）函数式移项化简得：$\dfrac{3}{4}x^2-xy+2-y^2=0$，这是一个关于 x 的一元二次方程，那么方程有实数解的条件为 $(-y)^2-4\times\dfrac{3}{4}(2-y^2)\geq 0$，解得 $y^2\geq\dfrac{3}{2}$ 由于 $y=\sqrt{2+x^2}-\dfrac{1}{2}x>|x|-\dfrac{1}{2}x\geq 0$，所以 $y\geq\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，如果 y 取到 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，那么一元二次方程 $\dfrac{3}{4}x^2-xy+2-y^2=0$ 有两个相等的根，为 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，此时 $y_{\min}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

反思：求函数 y 的最小值，换而言之就是求该函数的值域问题，即 y 的取值范围是多少，而此题当中的函数不是一个基本初等函数，要想直接求出它的值域难度较大，解法一运用了导数并结合单调性求出了 y 的最小值，是常规的解题思路。同样也可以运用把"未知看成已知"的思想，把 y 看成已知，那么此题就转化为了一个一元二次方程有解的条件，即判别式要大于等于 0，得出一个关于 y 的不等式，从而得出 y 的最小值。

例 6 形如 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}(a\neq 0,\ ad\neq bc)$ 的函数，它的值域为 $y\neq\dfrac{c}{a}$

证法 1（分离常数）首先要求一个函数的值域问题，必须要找准该函数的定义域，要求 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}(a\neq 0)$ 的定义域，必须要保证分母不为 0，因此该函数的定义域为：$\left\{x\mid x\neq-\dfrac{b}{a}\right\}$，分离常数得 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}=\dfrac{\frac{c}{a}(ax+b)+d-\frac{bc}{a}}{ax+b}=\dfrac{c}{a}+\dfrac{d-\frac{bc}{a}}{ax+b}$，又因为 $\dfrac{d-\frac{bc}{a}}{ax+b}\neq 0$，所以该函数的值域为 $y\neq\dfrac{c}{a}$

证法 2（未知当已知）$y=\dfrac{cx+d}{ax+b}(a\neq 0,\ ad\neq bc)$，把 y 当成已知数，去分母化简得 $(ay-c)x=d-by$，当 $y=\dfrac{c}{a}$ 时，$0=\dfrac{ad-bc}{a}$ 无解；当 $y\neq\dfrac{c}{a}$ 时，有解 $x=\dfrac{d-by}{ay-c}$，所以该函数的值域为 $y\neq\dfrac{c}{a}$

以上三个例题都是求函数值域的问题，方法多种多样，教师要引导学生在解完题目之后多加思考，将值

域问题转化为方程有解问题，利用判别式约束目标变量范围，突破直接求函数值域的局限性。

同时这种思想运用到公式定理的证明当中也能够达到意料之外的效果，例如点到直线的距离公式的证明。

4 点到直线的距离公式推导

点到直线的距离公式：平面中 $p_0(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax+By+C=0$ 的距离公式为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

证法 1 教材上是根据点到直线距离的定义，将点到直线的距离转化为两点间的距离，思路清晰自然但是计算量很大，过程繁琐，此处省略。

证法 2 如果把 $d=\dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 当成已知条件，则会有下列的证法：

设点 $p(x,y)$ 为直线 $l: Ax+By+C=0$ 外任意一点。因为直线外一点与该直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短。直线外一点到这条直线的垂线段的长度就是该点到直线的距离。所以要证明 $d=\dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，即证明下式成立即可。

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \geq \dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \Leftrightarrow (A^2+B^2)\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right] \geq (Ax_0+By_0+C)^2$ 由柯西不等式 $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$ 可得：

$$
\begin{aligned}
&(A^2+B^2)\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right] \geq \left[A(x-x_0)+B(y-y_0)\right]^2 \\
&=(Ax+By-Ax_0-By_0)^2=(-C-Ax_0-By_0)^2 \\
&=(Ax_0+By_0+C)^2
\end{aligned}
$$

所以有 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \geq \dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

即点 $p_0(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax+By+C=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

鉴于以上的讨论，“将未知视为已知”的思维策略，本质是打破变量角色的固有认知，通过重新定义问题简化求解过程。该思想不仅适用于函数与方程问题，还可迁移至几何证明、不等式分析等领域。教学中，教师需以典型例题为载体，显性化思维转换过程，帮助学生内化“无招胜有招”的数学思想，发展学生的发散思维。在平时的教育教学中发散思维能力的培养不仅关系到学生创造性思维能力的形成，而且关系到课堂教学的有效开展，最终实现从“解题者”到“策略者”的跨越。

5 反思建议

5.1 灵活变换思维，另寻出路

随着教育改革的不断深入，高中数学教育不再仅仅局限于知识点的掌握，而是更加注重学生数学思维的培养和能力的提升[4]。现在的学生大部分都会解一些常规和基础的题型，因为这些题目往往都有固定的解法和思路，但是高考不仅仅只会考察一些基础题型，也会出现一些运用惯性思维解决不了的问题，例如例 3，例 4 这样的问题，解决这样的问题往往需要变换思路，寻找其他的解决方法，正如这两道题就需要我们把一些在刻板印象当中的未知看成已知的，或者把我们要求的结论看成已知的，这样的思维方式在平常做题当中就要多加锻炼，这样不仅仅可以锻炼学生的发散思维和解决问题的能力，还可以让学生在面对难题时临危不乱，更加从容。

5.2 教师主导，挖掘多种解题方法

教师是课堂的主导者，掌握着课堂的发展方向和节奏，作为教师要明确这节课的教学目标是什么，同时在解决完一道问题时，教师要和学生多沟通，探求一题多解，或者题目变形，提供多种解题思路。如果教师总是按照惯性思维来教授学生解题，将不利于学生未来数学思维的发展，那么就要求教师可能需要创造一个开放的学习环境，鼓励学生提问和表达不同的观点。教师需要形成对培养学生创造性思维的正确认知，结合目前在学生学习能力优化上存在的缺陷和不足，实现对教学方法的不断改进，使学生思维模式进一步拓宽，改善学生思维水平，进而让学生获得更好的成长空间。达到培养学生学科素养的目标[5]。

教师也可以采用多样化的教学方法，比如支架式教学法等，教师通过提供适当的支架，引导学生主动参与，注重发挥学生的自主性，可以提高学生的学习效果[6]。多样化的教学方法能够激发学生的主动性和创造性。“师者，传道授业解惑者也”而现如今教师需要把知识融入日常的教学，注重知识之间的迁移，改变自身的教育思想和教学理念，以学习迁移理论为指导，从学生现有经验出发，设计教学活动，引领学生迁移课程知识，归纳学科知识的关联，积累学习经验和知识探究经验，逐步提升学生的学习迁移能力和概括能力[7]。最终提升学生的创新能力与问题解决能力。

5.3 学生主体，增加课后反思

现如今部分教师对学生的课堂主体地位尚未形成科学的认知，在实际的教学中习惯将自己放在主体地位，在一定程度上影响着学生的学习进步，降低了学生主体参与性[8]。而实际上学生才是课堂的主体，教师需要根据学生的需要灵活改变课堂，转变以教师为主的教学理念，采用凸显学生主体的教学模式，为学生的发展提供更好的支持和帮助。学生在课堂上学习完知识后教师要提出与本节课学到的知识相关的问题，引导学生课后多反思。而培养数学发散思维的关键就是需要学生在课后多做，多想，多思。学生自己要培养发散思维需刻意练习+跨界探索+心态开放，进一步提升数学教学的有效性学生可通过日常训练（如联想、逆向思考）、实践项目（跨学科、创造性活动）及工具辅助（思维导图、AI），逐步打破思维惯性。关键是将这些方法融入生活，形成“多问为什么”“拒绝标准答案”的本能，最终实现从“解题者”到“问题创造者”的转变。

参考文献

[1] 曹军.把未知当已知变繁解为简解[J].数学教学研究,2002,(02):32-34.
[2] 刘士成.海纳百川，万法归宗——数学教学中化归思想应用初探[J].中学数学,2020,(15):48-49.
[3] 任莉田.例析求函数最值的五种方法[J].语数外学习(高中版上旬),2025,(01):38-39.
[4] 叶清轩.高中数学教学中学生思维能力的培养策略[J].数学学习与研究,2025,(02):58-61.
[5] 许建平.关于高中数学教学中学生创造性思维培养的探究[J].新课程导学,2024,(03):21-24.
[6] 夏雨飞.高中数学支架式教学模式的应用研究[J].智力,2024,(35):144-147.
[7] 吴春乔.学习迁移理论在高中数学教学中的应用研究[J].数理天地(高中版),2025,(05):110-112.
[8] 黄兵.在高中数学教学中提高学生主体参与性的策略研究[J].高考,2024,(36):46-48.