例谈直线的参数方程在高考圆锥曲线大题中的应用

陈宇鹏，袁 缘

扬州大学数学科学学院　江苏扬州

【摘要】本文旨在探讨直线的参数方程在解决高考圆锥曲线线段长度问题中的优势应用。文章首先从几何视角阐释了参数 t 的几何意义，奠定了方法基础。进而，通过精析 2021 年全国 I 卷、2019 年全国 I 卷及 2021 年新高考 II 卷三道典型真题，具体演示了如何利用参数方程设线、联立，并借助参数 t 与韦达定理直接处理弦长及线段比例关系，从而规避复杂的坐标运算。案例分析表明，该方法在处理以定点为线段端点的长度问题时尤为高效，能显著简化计算流程。本文为高中师生攻克此类解析几何难题提供了一种清晰的解题视角和可操作的技术路径。

【关键词】直线的参数方程；圆锥曲线

【收稿日期】2025 年 11 月 14 日　　【出刊日期】2025 年 12 月 8 日　【DOI】10.12208/j.aam.20250033

Discussion on the application of parametric equations of lines in conic section problems of college entrance examinations

Yupeng Chen, Yuan Yuan

School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【**Abstract**】This paper aims to explore the advantageous applications of the parametric equations of straight lines in solving problems related to the length of line segments in conic sections in the College Entrance Examination. The article begins by explaining the geometric significance of the parameter t from a geometric perspective, establishing the methodological foundation. Subsequently, by analyzing three typical exam questions—the 2021 National I Volume, the 2019 National I Volume, and the 2021 New College Entrance Examination II Volume—the paper demonstrates how to use parametric equations to establish lines and set up equations, and directly handle chord lengths and segment proportional relationships with the parameter t and Vieta's theorem, thereby avoiding complex coordinate calculations. The case analysis shows that this method is particularly efficient in dealing with length problems where fixed points serve as the endpoints of line segments, significantly simplifying the calculation process. This paper provides high school teachers and students with a clear problem-solving perspective and an operable technical approach to tackle such analytic geometry challenges.

【**Keywords**】Parametric equations of lines; Conic sections

1 直线参数方程的推导

所谓直线的参数方程，是指直线上的点的横、纵坐标分别是某个参数 t 的函数，给定了一个参数 t，就唯一确定了直线上的一个点，反过来，直线上的一个点也唯一对应了一个参数 t[1]。

人教版教材选修 4-4 用向量的方法推导出了直线的参数方程，从推导过程我们可以看到参数 t 的几何意义。

经过点 $P_0(x_0,y_0)$，倾斜角为 θ 的直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = x_0 + t\cos\theta \\ y = y_0 + t\sin\theta \end{cases}$（$t$ 为参数），我们把这一形式称为直线参数的标准形式。如图 1 所示，参数 t 表示以 $P_0(x_0,y_0)$ 为起点，以直线上任意一点 $P(x,y)$ 为终点的

有向线段的数量，$|t|$表示P_0与P之间的距离，即$|P_0P|=|t|$。

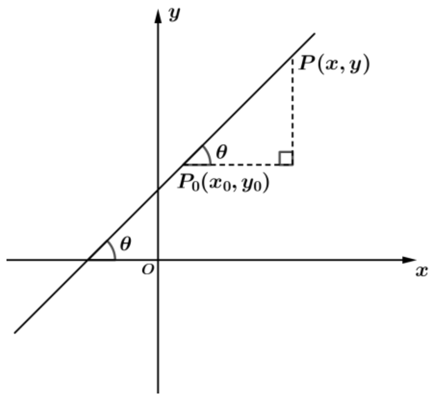

图 1 直线参数方程的推导

下面我们用一种更为直观的方式给出推导过程，从而可以更好的理解参数t的几何意义。已知直线上某给定点P_0的坐标$P_0(x_0,y_0)$，直线l的倾斜角为θ，设直线上任一点P的坐标$P(x,y)$，我们分四种情况，来计算P的横、纵坐标，即l的参数方程。即θ是锐角或钝角以及点P位于P_0的上面还是下面[2,3]。

若$t>0$，则P在P_0上方，如图 2，$|P_0N|=t\cdot\cos\theta$且P_0位于第三象限，$x_0<0,y_0<0$。又因为$x=|P_0N|-|x_0|$，所以$x=t\cos\theta+x_0$。同理可得$y=t\sin\theta+y_0$。

若$t<0$，则P在P_0下方，如图 3，$|P_0N|=-t\cdot\cos\theta$且P_0位于第一象限，$x_0>0,y_0>0$。又因为$x=-|P_0N|+|x_0|$，所以$x=t\cos\theta+x_0$。同理可得$y=t\sin\theta+y_0$。

若$t>0$，则P在P_0上方，如图 4，$\angle\alpha=\theta-\dfrac{\pi}{2}$，$|P_0N|=-t\cdot\cos(\theta-\dfrac{\pi}{2})=-t\sin\theta$且$P_0$位于第四象限，$y_0<0$。又因为$y=|P_0N|+|x_0|$，所以$y=t\sin\theta+y_0$。同理可得$x=t\cos\theta+x_0$。

若$t<0$，则P在P_0下方，如图 5，$\angle\alpha=\theta-\dfrac{\pi}{2}$，$|P_0N|=-t\cdot\cos(\theta-\dfrac{\pi}{2})=-t\sin\theta$且$P_0$位于第二象限，$x_0<0$。又因为$y=|P_0N|+|x_0|$，所以$y=t\sin\theta+y_0$。同理可得$x=t\cos\theta+x_0$。

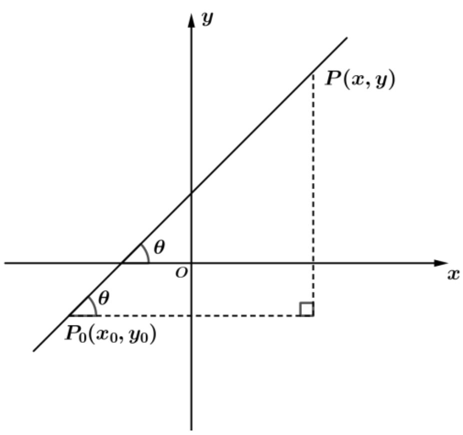

图 2 θ是锐角且点P位于P_0的上面

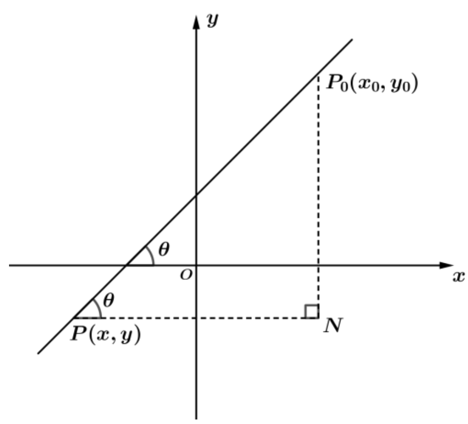

图 3 θ是锐角且点P位于P_0的下面

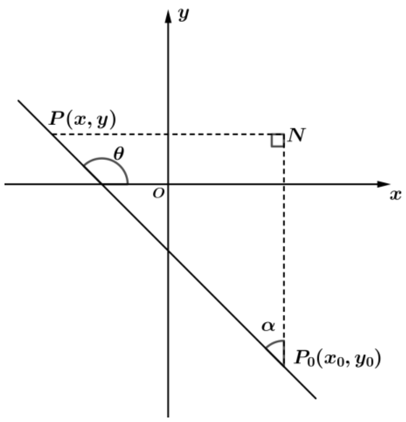

图 4　θ 是钝角且点 P 位于 P_0 的上面

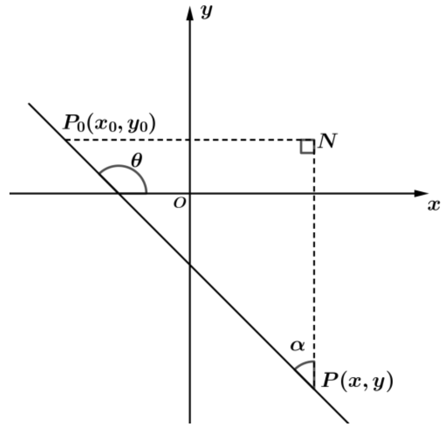

图 5　θ 是钝角且点 P 位于 P_0 的下面

2 高考真题解析

从上述推导过程我们可以看到，参数 t 的几何意义实际上就是直线上的点到给定点的“带符号”的距离，因此将直线的参数方程带入圆锥曲线方程后，得到一个关于 t 的一元二次方程，它的两个根 t_1，t_2 自然就是直线与圆锥曲线两个交点到直线上这个给定点的带符号的长度，再结合韦达定理，我们就可以处理与这些长度相关联的问题[4]，比如求两个交点 A，B 之间的距离即弦长 AB，就可以表示为 $\left|t_A-t_B\right|=\sqrt{(t_A+t_B)^2-4t_A\cdot t_B}$. 而用通常的点斜式直线方程带入圆锥曲线方程求，则要用到两点间的距离公式，再加上韦达定理，其计算量明显更大[5]。这也是直线参数方程善于处理长度类问题的核心原因。

我们来看三道为直线参数方程“量身定做”的题目。

例 1（2021 年全国高考 I 卷）在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1(-\sqrt{17},0)$，$F_2(\sqrt{17},0)$，$\left|MF_1\right|-\left|MF_2\right|=2$，点 M 的轨迹为 C。

（1）求 C 的方程。

（2）设点 T 在直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 上，过 T 两条直线分别交 C 于 A、B 两点和 P、Q 两点，且 $\left|TA\right|\cdot\left|TB\right|=\left|TP\right|\cdot\left|TQ\right|$，求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和。

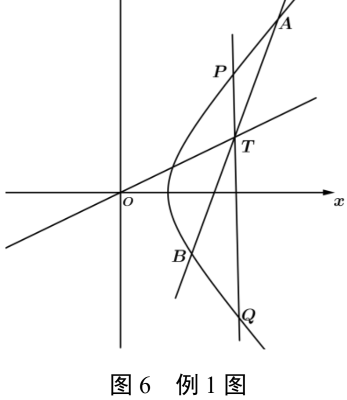

图 6　例 1 图

（1）答案：C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{16}=1(x\geq 1)$（过程略）；

（2）解析：如图 6 所示，在直线的参数方程中，由于两个动点所对应的参数之积的绝对值表示的是线段长度的乘积，通过韦达定理计算两参数之积，避免了对斜率是否存在的繁琐讨论以及两点之间距离的复杂计算。最后通过待定系数法求出两直线倾斜角之和，从而得到斜率之和。

解答：令T的坐标为$\left(\frac{1}{2},y_0\right)$，直线$AB$与直线$PQ$的参数方程分别为

$$l_{AB}:\begin{cases}x=\frac{1}{2}+t\cos\alpha\\y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}，\ l_{PQ}:\begin{cases}x=\frac{1}{2}+t\cos\beta\\y=y_0+t\sin\beta\end{cases}，\ （\alpha,\beta\in[0,\pi)）$$

设参数为t，点A,B对应的参数为t_A,t_B，点P,Q对应的参数为m_P,m_Q。分别将直线AB与直线PQ的参数方程代入椭圆方程得

$$\left(\frac{1}{2}+t\cos\alpha\right)^2-\frac{\left(y_0+t\sin\alpha\right)^2}{16}=1$$

$$\left(\frac{1}{2}+t\cos\beta\right)^2-\frac{\left(y_0+t\sin\beta\right)^2}{16}=1$$

整理得

$$\left(\cos^2\beta-\frac{1}{16}\sin^2\beta\right)t^2+\left(\cos\beta-2y_0\sin\beta\right)t-\left(\frac{3}{4}+\frac{y_0^2}{16}\right)=0$$

$$\left(\cos^2\beta-\frac{1}{16}\sin^2\beta\right)t^2+\left(\cos\beta-2y_0\sin\beta\right)t-\left(\frac{3}{4}+\frac{y_0^2}{16}\right)=0$$

由韦达定理可得

$$t_A\cdot t_B=\frac{-\left(\frac{3}{4}+\frac{y_0^2}{16}\right)}{\cos^2\alpha-\frac{1}{16}\sin^2\alpha}，\ m_P\cdot m_Q=\frac{-\left(\frac{3}{4}+\frac{y_0^2}{16}\right)}{\cos^2\beta-\frac{1}{16}\sin^2\beta}$$

根据题设$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|=|t_A\cdot t_B|=|m_P\cdot m_Q|$可得

$$\frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{y_0^2}{16}\right)}{\cos^2\alpha-\frac{1}{16}\sin^2\alpha}=\frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{y_0^2}{16}\right)}{\cos^2\beta-\frac{1}{16}\sin^2\beta}，\ 其中\frac{3}{4}+\frac{y_0^2}{16}>0$$

所以

$$\cos^2\alpha-\frac{1}{16}\sin^2\alpha=\cos^2\beta-\frac{1}{16}\sin^2\beta$$

那么

$$\sin^2\alpha=\sin^2\beta，\ \sin\alpha=\sin\beta$$

由此可得$\alpha+\beta=\pi$，斜率之和

$$\tan\alpha+\tan\beta=\tan\alpha+\tan(\pi-\alpha)=\tan\alpha-\tan\alpha=0$$

例 2（2019 年全国高考 I 卷）已知抛物线$C:y^2=3x$的焦点为F，斜率为$\frac{3}{2}$的直线l与C的交点为A，

B，与 x 轴的交点为 P。

（1）若 $|AF|+|BF|=4$，求 l 的方程；

（2）若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求 $|AB|$。

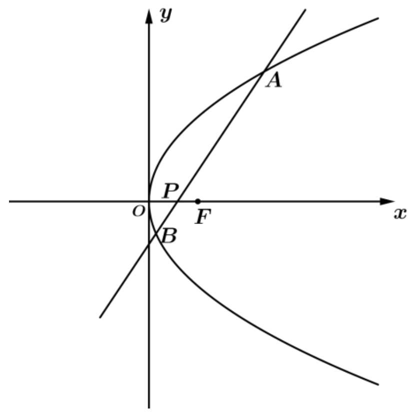

图 7　例 2 图

（1）答案：直线 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{7}{8}$（过程略）。

（2）解析：如图 7 所示，本题先假设出直线的参数方程，进而利用参数 t 的几何意义表示线段 AP 与 PB 的长度，避免了求距离的繁琐计算。将直线的参数方程与抛物线方程联立，结合韦达定理得到参数间的关系，最后根据题设中的长度倍数关系，快速便捷地求出线段 AB 的长度。与设线设点等繁琐的方法相比，无疑是一种高效的解题方法。

解答：设 P 点坐标为 $\left(x_0,0\right)$，由于过 A,B 两点的直线 l 的方程为 $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{7}{8}$，故直线 l 的参数方程为：

$$l:\begin{cases}x=x_0+\dfrac{2\sqrt{13}}{13}t\\ y=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}t\end{cases}\quad（t\text{ 为参数}）$$

设参数为 t，点 A，B 对应的参数分别为 t_A，t_B。将直线的参数方程代入抛物线方程得

$$\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}t\right)^2=3\cdot\frac{2\sqrt{13}}{13}t$$

则

$$\frac{9}{13}t^2-\frac{6\sqrt{13}}{13}t-3x_0=0$$

所以 $t_A+t_B=\dfrac{\frac{6\sqrt{13}}{13}}{\frac{9}{13}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$，由题知 $t_A=-3t_B$，得

$$\frac{t_B}{t_A}+\frac{t_A}{t_B}=\frac{\left(t_A+t_B\right)^2-2t_A\cdot t_B}{t_A\cdot t_B}=-\frac{10}{3}$$

故$\left(t_A+t_B\right)^2=-\dfrac{4}{3}t_A\cdot t_B=(\dfrac{2\sqrt{13}}{3})^2=\dfrac{52}{9}$，解得$t_A\cdot t_B=-\dfrac{13}{3}$，

所以点A到点B的距离为：$\left|AB\right|=\left|t_A-t_B\right|=\sqrt{\left(t_A+t_B\right)^2-4t_At_B}=\dfrac{4\sqrt{13}}{3}$。

例 3（2021 年全国新高考 II 卷）已知椭圆C的方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，右焦点为$F(\sqrt{2},0)$，且离心率为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。

（1）求椭圆C的方程；

（2）设M，N是椭圆C上的两点，直线MN与曲线$x^2+y^2=b^2\ (x>0)$相切。证明：M，N，F三点共线的充要条件是$\left|MN\right|=\sqrt{3}$。

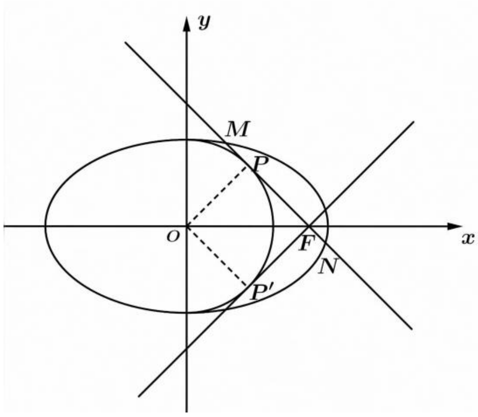

图 8　例 3 图

（1）答案：椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$（过程略）。

（2）分析：如图 8 所示，该题以直线与椭圆相交为背景，涉及圆、向量以及圆锥曲线等知识，综合性较强。利用题中所给条件，结合圆的参数方程巧妙假设出直线的参数方程，利用参数t的几何意义表示出线段PM与PN的长度，结合韦达定理进而求出线段MN的长度。反之，将$\left|MN\right|=\sqrt{3}$代入直线MN参数方程与椭圆联立后得到的方程，利用M，N，F三点共线与$\angle POF=\angle P'OF=\dfrac{\pi}{4}$为等价关系的条件，即可证得$M$，$N$，$F$三点共线。

解答：“$\Rightarrow$”由（1）得$b=1$，所以曲线方程为$x^2+y^2=1(x>0)$，设曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$$

设切点P的坐标为$\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，所以直线$MN$的参数方程为

$$l_{MN}:\begin{cases}x=\cos\theta+t\cos(\theta+\dfrac{\pi}{2})\\ y=\sin\theta+t\sin(\theta+\dfrac{\pi}{2})\end{cases}\quad（t\text{为参数，}\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)）$$

因为M，N，F三点共线，且$OP \perp MF$，所以ΔOPF为直角三角形。又因为$\left|OF\right| = \sqrt{2}$，$\left|OP\right| = 1$，$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则$\theta = \dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{3\pi}{4}$。下证$\theta = \dfrac{\pi}{4}$的情况。

直线MN的参数方程为

$$l_{MN}:\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$$

设点M，N对应的参数值分别为t_M，t_N。将直线l_{MN}的参数方程代入椭圆C的方程得

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2}{3} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 = 1$$

整理得

$2t^2 + 2t - 1 = 0$。

所以$t_M + t_N = -1$，$t_M \cdot t_N = -\dfrac{1}{2}$。

根据参数t的几何意义可知

$$\left|MN\right| = \left|t_M - t_N\right| = \sqrt{\left(t_M + t_N\right)^2 - 4t_M \cdot t_N} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

即$\left|MN\right| = \sqrt{3}$，得证。 同理可证$\theta = \dfrac{3\pi}{4}$时的情况。

“$\Leftarrow$”若弦长$\left|MN\right| = \sqrt{3}$，令直线$MN$的参数方程为：

$$\begin{cases} x = \cos\theta + t\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ y = \sin\theta + t\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{cases}，\theta \in \left[0, \pi\right)$$

将直线MN的参数方程代入椭圆C的方程，得

$$\frac{\left[\cos\theta + t\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2}{3} + \left[\sin\theta + t\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 = 1$$

整理得

$$\left(3 + \tan^2\theta\right)t^2 + \left(4\tan\theta\right)t - 2 = 0$$

所以$t_M + t_N = -\dfrac{4\tan\theta}{3 + \tan^2\theta}$，$t_M \cdot t_N = -\dfrac{2}{3 + \tan^2\theta}$。

又因为$\left|MN\right| = \left|t_M - t_N\right| = \sqrt{\left(t_M + t_N\right)^2 - 4t_M \cdot t_N}$，所以

$$\left|MN\right| = \sqrt{\left(\frac{4\tan\theta}{3 + \tan^2\theta}\right)^2 + 4\cdot\frac{2}{3 + \tan^2\theta}} = \sqrt{3}$$

即

$$16\tan^2\theta+8(3+\tan^2\theta)=3(3+\tan^2\theta)^2$$

整理得

$$\tan^4\theta-2\tan^2\theta+1=0$$

解得 $\tan\theta=1$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3}{4}\pi$， M， N， F 三点共线，得证。

3 总结解题要点

方法论要点一：化几何关系为代数参数的统一处理。与传统方法相比，直线的参数方程通过引入参数 t，将交点的几何位置关系转化为关于 t 的代数方程。当问题涉及以定点为端点的线段长度时，长度 $|AB|$ 可直接表示为 $|t_A-t_B|$，这实质上是将复杂的几何度量统一于代数运算之下，简化了推导路径[6,7]。

方法论要点二：运用参数方程法，定点 (x_0,y_0) 的选择，往往决定了后续运算的复杂度。因此，一个核心原则是优先选择题目中已知条件或所问线段涉及的端点。在使用此法前，需要先进行不同点作为参数方程的定点来简单试误，根据计算的大致难易程度来确定设参数方程的方向[8]。

方法论要点三：在处理复杂系统的时候，可以通过引入合适的参数，将系统中各点、线段的性质统一到一个关于 t 的方程下进行研究，从而实现计算上的简便。

参考文献

[1] 蔡娇如. 怎样根据直线的参数方程中参数 t 的几何意义解题[J]. 语数外学习(高中版上旬),2025,(04):39.

[2] 丁继强. 用直线的参数方程中 t 的几何意义解题的思路[J]. 语数外学习(高中版中旬),2024,(07):46-47.

[3] 张本霖. 用直线的参数方程解答直线与圆锥曲线问题的思路[J]. 语数外学习(高中版下旬),2024,(12):41-42.

[4] 胡蓉. 参数方程——解答圆锥曲线问题的“利器”[J]. 语数外学习(高中版上旬),2025,(11):51-52.

[5] 孙乐汉. 例谈直线参数方程的应用价值——以新高考 I 卷圆锥曲线问题为例[J]. 高中数理化,2023,(21):4-5.

[6] 刘千脉. 巧用参数方程解决高中数学圆锥曲线中的问题——以 2024 年全国新高考 I 卷高考数学 16 题为例[J]. 数理化解题研究,2025,(25):68-70.

[7] 宋璐佳. 如何用直线的参数方程解答两类解析几何问题[J]. 语数外学习(高中版下旬), 2024,(03):52-53.

[8] 沈新权. 合理利用直线的参数方程，优化高考压轴题的求解[J]. 高中数理化,2021,(05)：14-17.