折叠几何问题的多解策略探究——以一道 2024 年济南市中考压轴题为例

李德硕

扬州大学　江苏扬州

【摘要】本文以 2024 年济南市中考压轴题为例，围绕折叠变换与几何推理展开深入分析，展示多种解题策略与多维数学思想，旨在落实新课标背景下数学核心素养的教学理念，提升学生的问题解决能力与几何直观能力。

【关键词】一题多解；核心素养；折叠几何

【收稿日期】2025 年 9 月 30 日　【出刊日期】2025 年 11 月 2 日　【DOI】10.12208/j.jrpe.20250001

Exploring multiple solution strategies for folding geometry problems—taking a challenging question from the 2024 Jinan junior high school entrance examination as an example

Deshuo Li

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

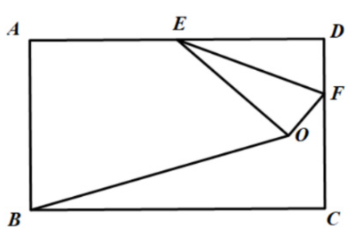
【**Abstract**】This paper uses a difficult geometry problem from the 2024 Jinan City High School Entrance Examination as an example. It focuses on folded transformations and geometric reasoning, showing different solution strategies and ways of thinking. The aim is to apply the teaching concept of mathematical core literacy in the new curriculum standard, and to improve students' problem-solving and geometric intuition abilities.

【**Keywords**】Multiple solution strategies; Core literacy; Folded geometry

本文以 2024 年济南市中考一道折叠几何压轴题为例，深入探究折叠几何问题的多解策略。首先对题目条件进行分析，明确折叠带来的全等关系及相关三角形的特征；随后从图形变换构造对称全等、“一线三垂直”相似模型、代数建模与函数思想三个思路，展示了 8 种具体解法，其中图形变换思路通过构造对称全等、平行四边形、隐圆等实现求解，“一线三垂直”模型类借助构造垂线等转化出相似三角形推导，代数建模思路则融合几何与代数知识；最后得出教学中应培养学生模型意识和核心素养等启示，旨在落实新课标背景下数学核心素养的教学理念，提升学生的问题解决能力与几何直观能力[1]，几何图形的许多变化可以进行定量分析[2]，其中一些“几何结构”可以通过特定的“代数表达”来反映．反之，也可以通过“代数表达”来推断图形蕴含的某种特定的“几何结构”[3]，“代数表达”是发现几何结构洞察力的关键，而“几何结构”是代数表达的几何直观[4]。

1 试题呈现及立意分析

如图 1，矩形 ABCD，$AB=\sqrt{2}$，$AD=2$，E 为 AD 中点，F 在 CD 上，ΔEDF 折叠得到 ΔEOF 且 $BO=2$，则 $DF=$？



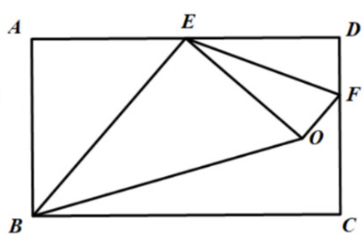


图 1

2 条件分析

为方便后续解题，对题目的条件进行总领整合，可以对题目已知条件进行以下分析：

由翻折可知两三角形全等，即 $\Delta EOF \cong \Delta EDF$，对应全等可得相应的边角关系，即 $DE = OE = 1, DF = OF, \angle EOF = \angle D = 90^{\circ}, \angle OEF = \angle DEF$。观察图像，连接辅助线 BE，通过勾股定理可得 $BE = \sqrt{3}$，在 ΔBOE 中，由勾股定理逆定理可得 $\angle BEO = 90^{\circ}$，最终可得 ΔBOE 是直角三角形，为后续的解题大有帮助。

3 解法展示

思路 1：图形变换构造对称全等

解法 1：边长转化法

见图 2，连接 OA、BE。由解析可知：

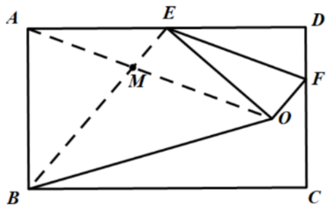


图 2

$\because \angle BEO = \angle EOF = 90^{\circ}$

$\therefore BE /\!/ OF$

在 ΔAEO 中，$AE = EO = 1$ 故：$\angle EAO = \angle EOA$

$\because \angle\ \angle DEO = \angle EAO + \angle EOA = 2\angle EOA$

$\angle DEO = \angle DEF + \angle OEF = 2\angle OEF$

$\therefore \angle EOA = \angle OEF$，即 $EF /\!/ OA$

故四边形 $EMOF$ 是平行四边形。有 $OF = EM$

$Rt\Delta MEO$，$\angle EOM + \angle EMO = 90^{\circ}$，又 $\angle EAO = \angle EOM$ 且 $\angle BMA = \angle EMO$

故 $\angle BAM = \angle BMA$，$AB = BM = \sqrt{2}$

$DF = ME = BE - AB = \sqrt{3} - \sqrt{2}$。

解法 2：隐含圆与共圆构造法

见图 3，连接 OD、AO、BE，OD 交 EF 于点 N，AO 交 EF 于点 M。

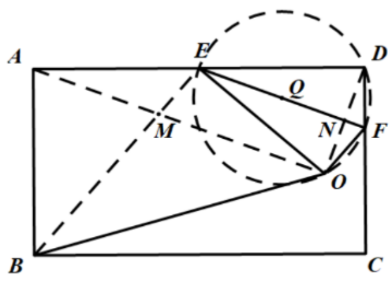


图 3

$\because \angle EOF = \angle BEO = 90^{\circ}$ $\therefore BE /\!/ OF$

由法一可知，$\angle DEF = \angle EAO$，$EF /\!/ AO$，故四边形 $EMOF$ 为平行四边形

则 $\angle EMO = \angle EFO$，$ME = OF = DF$

由于对角互补，则 $EOFD$ 四点共圆。

得出两组圆周角相等，即 $\angle EDO = EFO, \angle DOF = \angle DEF$。

有 $\angle BAO=\angle ADO=\angle EFO=\angle EMO=\angle AMB$

则 $AB=BM=\sqrt{2}$

故 $DF=ME=BE-BM=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 。

解法 3：全等法

见图 4，连接 BE ，延长 BA、FE 相交于点 M 。

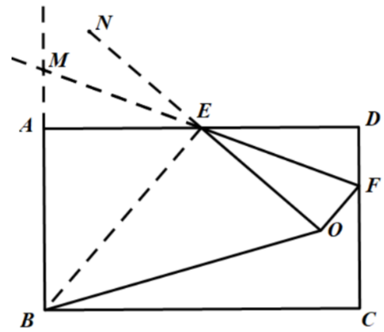


图 4

易证 $\Delta AME\cong\Delta DFE$　有 $\angle AME=\angle EFD$

延长 OE ，取一点记为 N

$\because\angle EFD+\angle DEF=90^{\circ}$

由对顶角相等与翻折，　$\angle MEN=\angle OEF=\angle DEF$

又 $\because\angle BEM+\angle MEN=90^{\circ}$

$\therefore\angle BEM=\angle EFD$

故 $\angle BME=\angle AEM$ ，$BM=BE=\sqrt{3}$

得 $DF=AM=BM-BA=BE-AB=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

点评：此类解法聚焦于图形的折叠特性，通过构造对称轴、平行四边形、全等三角形等策略实现翻折前后量的对应关系。解法 1 通过外角和以及翻折角的等角关系构造平行四边形，将问题核心转化为，借助所构造出的等腰三角形的边长关系；解法 2 相对于解法 1，主要是利用图形的隐圆及圆周角进行多角关系的处理；解法 3 将视野放大到原图之外，同样是借助构造等腰三角形，但在证明的过程中的角度关系上更为简洁。

思路 2：“一线三垂直”相似模型类

解法 4：一线三垂直

（1）见图 5，连接 BE 。过点 O 作 $OM\perp AD$ ，垂足为 M ，OM 、EF 交于点 N 。

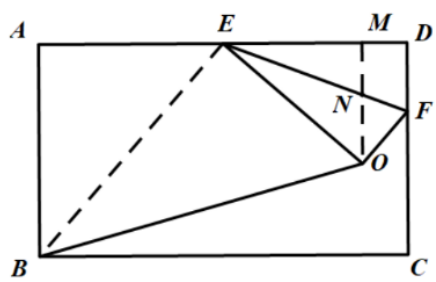


图 5

翻折知，设 $DF=FO=x$ 。

$\because OM/\!/CD$

$\therefore\angle ONF=\angle DFN,ON=OF=x$

由“一线三垂直”（8 字型）模型，得$\Delta MEO \backsim \Delta ABE$

$$\therefore \frac{ME}{AB}=\frac{MO}{AE}=\frac{EO}{BE}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$ME=\frac{\sqrt{6}}{3}, \quad MO=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$MN=MO-ON=\frac{\sqrt{3}}{3}-x$$

$OM /\!/ CD$，易得$\Delta EMN \backsim EDF$

$$\frac{MN}{DF}=\frac{EM}{ED}\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-x}{x}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

解得$x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

（2）见图 6，延长EO交DC于点M

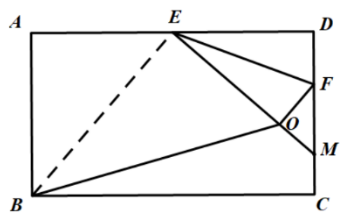


图 6

由“一线三垂直”模型，$\Delta AEB \backsim \Delta DME$

$$\frac{AE}{DM}=\frac{AB}{DE}=\sqrt{2}，则 DM=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$设 DF=x，\quad FM=\frac{\sqrt{2}}{2}-x，\quad OM=\frac{\sqrt{6}}{2}x$$

在$Rt\Delta OFM$中，由勾股定理 $OF^2+OM^2=MF^2$

$$x^2+(\frac{\sqrt{6}}{2}x)^2=(\frac{\sqrt{2}}{2}-x)^2$$

解得$x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 。

解法 5：一线三等角

见图 7，连接BE。过点O作$OM /\!/ AD$, 交CD于M 。过点E作$EN \perp$ OM，垂足为点N。

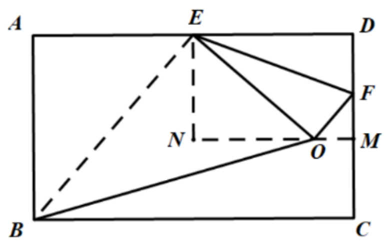


图 7

由平行与“一线三等角”，可得：

$\angle ABE=\angle BEN=\angle NOE=\angle OFM=\alpha$

$\angle AEB=\angle NEO=\angle FOM=\beta$

在 $Rt\Delta ABE$ 中，$\tan\alpha=\tan\angle ABE=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，

在 $Rt\Delta NEO$ 中，

$$\sin\angle NOE=\sin\alpha=\frac{NE}{OE}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow NE=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

易得四边形 $ENMD$ 为矩形，则 $DM=EN=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

在 $Rt\Delta OMF$ 中，$\tan\angle OFM=\tan\alpha=\dfrac{OM}{MF}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

设 $OM=x$，$MF=\sqrt{2}x$，$OF=\sqrt{3}x$（勾股定理）

$DM=DF+MF=OF+MF=\sqrt{3}x+\sqrt{2}x$

$DM=EN=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解得 $x=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3},DF=\sqrt{3}x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$。

点评：该类解法以构造垂线、投影点、垂足为核心，转化出直角或相似三角形模型进行推导，强调图形结构的标准化与数量关系的逐步构建。解法 4 中的两种“一线三垂直”模型借立“8 字型”以及“A 字型”得出相似三角形的边长比例，分别与另一组比例和勾股定理简建立等式来求未知边长；解法 5 中更多的借助“一线三等角”寻求角与边的关系。此类方法更具条理性，对“一线三垂直”等相似模型要有熟练掌握与应用。

思路 3：代数建模与函数思想

解法 6：建系

见图 8，以 BC 所在直线为 x 轴，以 BA 所在直线为 y 轴建系。

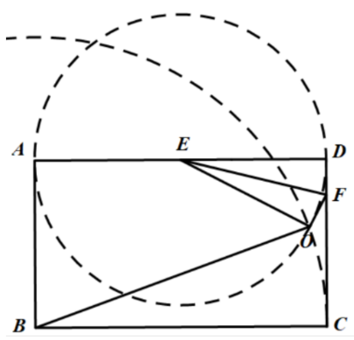


图 8

EO、BO 为定长，点 O 可看作⊙E 与⊙B 的一交点且在矩形内部。

⊙E：$(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2=1$

⊙$B:x^2+y^2=4$

得出$O(\frac{3+\sqrt{6}}{3},\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3})$设$F(2,m)$，$0<m<\sqrt{2}$

$\because OF=DF \therefore (2-\frac{3+\sqrt{6}}{3})^2+(m-\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3})^2=(\sqrt{2}-m)^2$

解得$m=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

故$DF=\sqrt{3}-\sqrt{2}$。

解法 7：二倍角公式

见图 9，连接BE，设$\angle AEB=\theta$，$\angle DEF=\angle OEF=\alpha$，　$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

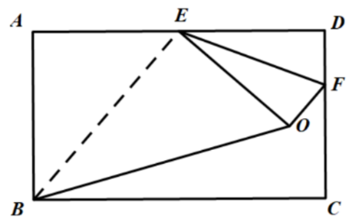


图 9

在$Rt\Delta AEB$中，$\tan\angle AEB=\tan\theta=\sqrt{2}$

$\angle DEO=2\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$，$\tan 2\alpha=\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

由二倍角公式$\tan\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$可知，

对于α，$\tan 2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得$\tan\alpha=-\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$

$\because \tan\alpha>0 \therefore \tan\alpha=\sqrt{3}-\sqrt{2}$（舍去负根）

代入$Rt\Delta DEF$中，$DF=\sqrt{3}-\sqrt{2}$。

解法 8：三角函数

见图 10，连接BE，延长AB并截取BM，使得$BM=BE$，连接ME。

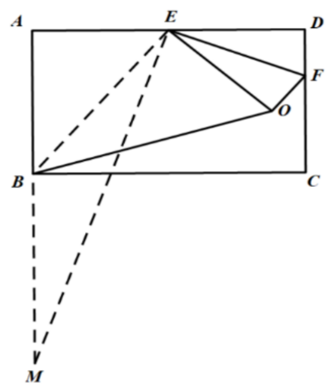


图 10

$\because BM=BE \therefore \angle M=\angle BEM=\alpha$

$\because \Delta ABE$中，$\angle AEB+2\alpha=\frac{\pi}{2}$

又$\because \angle AEB+2\angle DEF=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \angle DEF=\alpha$

在 $Rt\Delta AEM$ 中，$\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

故在 $Rt\Delta DEF$ 中，$\tan\alpha=\dfrac{DF}{DE}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

则 $DF=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 。

点评：函数类方法是几何与代数融合的高阶应用形式，体现了对“图、式、算”之间关系的深度把握。解法 6 的建系方法算是属于暴力解法，其中同样涉及到隐圆问题；解法 7 与解法 8 所涉及到的知识内容，以 SOLO 分类理论分析，更适合思维能力达到抽象拓展结构水平的学生[5]。思路 3 相比于前两种思路无疑从解答速度或者解题步骤来说更为简洁，但同样对于思维更具挑战性以及对学生的原有认知水平有了更为严苛的要求。

4 启示

4.1 图形表象，抓住折叠问题本质，提炼出基本几何模型

几何折叠问题常以复杂图形呈现，学生往往难以下手。教师应引导学生抓住折叠的本质——对称与全等关系，从复杂图形中抽象出基本的几何模型，如全等三角形、相似三角形、等腰三角形等，从而实现“拨云雾而青天见，抛繁冗而模型现”。

本文展示的多种解法，正是通过构造对称轴、平行四边形、全等三角形等策略，将复杂问题逐步简化。几何教学中要重视基本图形的教学[6]，教学中应注重培养学生的模型意识，引导学生善于抽象与简化，抓住问题本质。同时，教师应帮助学生夯实《义务教育数学课程标准（2022 年版）》（以下简称《课标（2022 年版）》）提出的“四基”（基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验）和“四能”（发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力），提升学生的综合解题能力。

4.2 特征入手，推断整体图形结构，实现对问题的全面把握

折叠几何问题的解题过程，是对学生数学核心素养的全面检验。学生需具备敏锐的观察力、严谨的逻辑推理能力、灵活的数学建模能力以及良好的直观想象能力。然而学生在几何解题时却面临着诸多困难，如对几何语言的陌生感，无法有效解读图形关系[7]，另外学生在操作与逻辑推理上的欠缺，也使得他们难以形成系统的解题思路和策略[8]。教师可以定期进行教学评估，发现学生在推理过程中遇到的障碍，并及时调整教学策略，给予更多的个性化辅导和支持[9]。

观察力是解题的起点，学生需仔细观察图形，捕捉折叠前后的细微变化，识别关键的几何元素与数量关系。逻辑推理是解题的关键，学生需根据已知条件，结合几何定理，逐步推导出未知量[10]。直观想象则是学生理解图形变化、构建解题思路的重要基础。因此，教师在教学中应注重培养学生的核心素养，引导学生在解题过程中不断提升自己的综合能力。同时，教师也应鼓励学生从局部入手，通过观察局部特征，推断整体结构，从而实现“窥一斑而全豹见，触一隅而通全局”的解题效果。

参考文献

[1] 邱潇怡．相似三角形的基本图形在教学实践中的深入探究［J］．中学科技，2023(1):16－20．

[2] 金晶.几何解题中“几何结构”与“代数表达”的有机关联——以 2024 年浙江省数学中考第 10 题的解析与思考为例[J].中学教研(数学),2025,(07):44-48.

[3] 蒋玲玲.基于几何直观，聚焦图形结构的“代数表达”——2023 年杭州市数学中考第 23 题的解析与思考[J].中学教研(数学),2023,(12):34-37.

[4] 陈小青，王红权．通过构建“ 几何结构”与“ 代数表达”的关联解题[J].中学教研(数学),2021,(1):16-19．
[5] 石子悦,何青玉,周扣华.剖析中考压轴题启迪教学新主张——关于一道中考压轴题的思考[J].初中数学教与学,2024,(15):46-49.
[6] 段春炳.考查核心素养引领几何教学——2020 年杭州市数学中考试卷第 23 题赏析[J].中学教研(数学),2021,(01): 44-48.
[7] 高京南.阅读・操作・分析：提升初中生几何解题能力的策略探讨[J].中学教研(数学),2025,(06):32-35.
[8] 丁浩钊.初中生几何学习思维障碍分析及消除研究[D].扬州大学,2022.
[9] 黄尔迪.初中生几何学习方法和习惯的养成途径[J].广西教育,2020,(13):133-134.
[10] 朱胜强.借助几何直观培养学生分析探究解决问题的能力[J].数学通报,2022,61(08):46-49+57.