

关于匹配和偶圈的广义 Turán 问题

任荣杰

南京航空航天大学数学学院 江苏南京

【摘要】Turán 数是极值图论的经典研究问题。星图 S_k 是由两个点集构成的一个完全二部图，其满足：一个集合只有一个顶点，另一个集合有 k 个顶点。设 $\mathbf{F}$ 是一个图集合。广义 Turán 数 $\text{ex}(n, S_k, \mathbf{F})$ 表示在一个具有 n 个顶点且不包含 $\mathbf{F}$ 中任意图作为子图的图中，所含星图 S_k 的最大个数。我们用 M_{s+1} , C_{2p} 分别表示具有 $s+1$ 条边的匹配和 $2p$ ($p \geq 2$) 条边的圈。在本文中，利用星图的结构性质和组合数的凸性，当 $\mathbf{F} = \{M_{s+1}, C_{2p}\}$ 时，我们得到了 $\text{ex}(n, S_k, \mathbf{F})$ ($k \geq 2$) 的准确值，并给出了对应的极图。

【关键词】 广义 Turán 数；匹配；偶圈；星图

【基金项目】 国家自然科学基金面上项目 (No.12271251)

【收稿日期】 2025 年 5 月 14 日 **【出刊日期】** 2025 年 6 月 18 日 **【DOI】** 10.12208/j.aam.20250010

Generalized Turán problems for a matching and an even cycle

Rongjie Ren

School of Mathematical, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, Jiangsu

【Abstract】 The Turán number is a classical problem in extremal graph theory. A star S_k is a complete bipartite graph consisting of two sets of vertices: one contains a single vertex, and the other contains k vertices. Let $\mathbf{F}$ be a family of graphs. The notion $\text{ex}(n, S_k, \mathbf{F})$ denotes the maximum number of copies of S_k in a graph on n vertices that does not contain any graph from the family $\mathbf{F}$ as a subgraph. Let M_{s+1} and C_{2p} denote a matching of $s+1$ edges and a cycle containing $2p$ ($p \geq 2$) edges, respectively. In this paper, by using the structural properties of stars and the convexity of combinatorial numbers, we determine $\text{ex}(n, S_k, \mathbf{F})$ ($k \geq 2$) for $\mathbf{F} = \{M_{s+1}, C_{2p}\}$, and give corresponding extremal graphs.

【Keywords】 Generalized Turán numbers; Matching; Even cycle; Star

1 引言

在本文中，所有图都是简单的无向图。首先，我们给出一些基本定义，文中未定义的概念请参考文献[1]。在图论中，圈是一个由边组成的闭合路径，其中每个顶点只与其邻接的两个顶点相连。匹配是图中的一组边，且任意两条边没有共同的顶点。星图是由两个点集构成的图，其中一个点集只有一个顶点，该顶点与另一个点集中的所有顶点相连，且另一个点集中的顶点之间没有边相连。完全图是满足每一对不同的顶点之间都有一条边相连的图。独立集是图中一组顶点，集合内的任意两个顶点之间没有边相连。完全二部图是一个特殊二部图，其中每个顶点集的顶点都与另一部分的所有顶点相连，且同一部分的顶点之间没有边相连。我们用 C_k , M_k 和 S_k 分别表示有 k 条边的圈，匹配和星图；用 I_r 和 K_r 分别表示具有 r 个顶点的独立集和完全图，用 $K_{s,t}$ 表示两个分部大小分别为 s 和 t 的完全二部图。设 $\mathbf{F}$ 是一个图集合，将一个不包含 $\mathbf{F}$ 中任意图作为子图的边最大的图，嵌入到完全二部图 $K_{s,n-s}$ 大小为 s 的分部中，所得到的图我们记为 $G(n, s, \mathbf{F})$ 。我们用 $\chi(F)$ 表示图 F 的点染色数。在一个图 F 中，如果存在一条边 e 使得 $\chi(F - e) < \chi(F)$ ，那么，我们称 F 是一个色临界图。

Turán 问题是图论中的一个经典问题，长期以来吸引了众多数学家和研究者的关注。经典 Turán 数

$\text{ex}(n, F)$ ，表示一个具有 n 个顶点且不包含 F 作为子图的图中，所含边数的最大值。半个世纪以来，Turán 问题在多个方面得到了进一步推广和延伸。在 2016 年，Alon 和 Shikhelman^[2]首次提出广义 Turán 数的概念。设 r 是一个正整数，广义 Turán 数 $\text{ex}(n, K_r, \mathbf{F})$ 表示一个具有 n 个顶点且不包含 $\mathbf{F}$ 中任意图作为子图的图中，所含 K_r 的最大个数。广义 Turán 问题从提出至今，一直被广泛关注，许多经典的 Turán 问题被推广到广义 Turán 问题，很多有趣的理论结果如雨后春笋般不断涌现（参见文献[3]-[13]）。在本文中，我们主要考虑不包含匹配的 Turán 问题。这类问题最早由 Erdős 和 Gallai^[14]提出，他们证明了 $\text{ex}(n, M_{s+1}) = \max\{e(G(n, s, K_{s+1})), e(K_{2s+1})\}$ ，并确定了极图。Wang^[11]将这一结果推广到广义 Turán 数 $\text{ex}(n, K_r, M_{s+1})$ 。随后，Chvátal 和 Hanson^[15]，以及 Balachandran 和 Khare^[16]分别独立地确定了 $\text{ex}(n, \{M_{s+1}, S_k\})$ 的值（ $s = k$ 的情况早期由 Abbott, Hanson 和 Sauer^[17]证明）。近期，Alon 和 Frankl^[18]提出了如下问题：对任意图 F 和一个匹配，确定经典 Turán 数，即 $\text{ex}(n, \{M_{s+1}, F\})$ 。Alon 和 Frankl^[18]证明：对一个色临界图 F ，如果它满足 $\chi(F) = k + 1 \geq 3$ ，那么 $\text{ex}(n, \{M_{s+1}, F\}) = e(G(n, s, K_k))$ 。这之后，Gerbner^[19]、Ma 和 Hou^[20]、Zhu 和 Chen^[21]等人分别对相关问题进行了深入研究。Gerbner^[19]研究了 $\chi(F) = 2$ 与 $\chi(F) \geq 3$ 时的经典 Turán 数，Ma 和 Hou^[20]将他们的结果扩展到广义 Turán 数。Zhu 和 Chen^[21]给出了关于广义 Turán 数 $\text{ex}(n, K_r, \{M_{s+1}, F\})$ 更强的结果，解决了 $\chi(F) = 2$ 时一些未提及的情况。本文进一步研究对于图集 $\{M_{s+1}, F\}$ 的广义 Turán 问题，当 F 是偶圈时，我们确定了 $\text{ex}(n, S_k, \{M_{s+1}, F\})$ 的精确值，并给出了对应的极图。

2 主要结果

为了更清楚地描述主要结果，我们首先给出一些定义。图 G 是一个二元组 $G = (V(G), E(G))$ ，其中 $V(G)$ 是顶点集， $E(G)$ 是边集。对于 $V(G)$ 的子集 U ， $G[U]$ 和 $G - U$ 分别表示由 U 和 $V(G) - U$ 导出的子图。对于两个图 H 和 G ， $H \cup G$ 表示 H 和 G 的不交并， $H + G$ 是图 $H \cup G$ 通过添加 $V(H)$ 和 $V(G)$ 间的所有边得到的图。对于一个二部图 F ，令 $p(F)$ 表示 F 的所有可能的色类中，点数最小的色类的大小。若 $\chi(F) \geq 3$ ，则令 $p(F) = \infty$ 。对于任意图 F ，若 $V(F)$ 的子集 S 满足 $V(F - S)$ 是独立集，则称 S 是 F 的一个覆盖集，并且我们用集合 $\mathbf{F}$ 表示由 F 的所有覆盖集 S 导出的子图 $F[S]$ 的集合。对于任意图 F 和正整数 p ，如果 F 的任一覆盖集的大小都大于 p ，那么令 $\mathbf{F}[p] = \{K_{p+1}\}$ ，否则，令 $\mathbf{F}[p] = \{F[S] : S \text{ 是 } F \text{ 的覆盖集并且 } |S| \leq p\}$ 。

在给出本文的结果之前，我们给出与本文相关的一个重要结果。

定理 2.1^[21] 设 F 是一个图， M_{s+1} 是一个匹配。令 $p < \min\{s + 1, p(F)\}$ ，且 $\text{ex}(n, K_{r-1}, \mathbf{F}[p])$ 在 $p = t$ 时达到最大值。那么，

$$\text{ex}(n, K_r, \{M_{s+1}, F\}) = \text{ex}(t, K_{r-1}, \mathbf{F}[t])n + O(1)$$

此外，如果 $p(F) \geq s + 1$ 且 $t = s$ ，那么，

$$\text{ex}(n, K_r, \{M_{s+1}, F\}) = \text{ex}(s, K_{r-1}, \mathbf{F}[s])(n - s) + \text{ex}(s, K_r, \mathbf{F}[s])$$

并且 $G(n, s, \mathbf{F}[s])$ 是唯一的极图。

由定理 1 可知，

$$\text{ex}(n, K_2, \{M_{s+1}, F\}) = \text{ex}(t, K_1, \mathbf{F}[t])n + O(1) = tn + O(1)$$

（该结果可由文献[21]中推论 1，推论 2 直接得出）。因此，在本文中，我们只考虑边数大于 1 的星图。我们的主要结果如下。

定理 2.2 当 $k \geq 2$ 且 n 充分大时，有

$$\text{ex}(n, S_k, \{M_{s+1}, C_4\}) = \binom{n-1}{k} + t$$

（1）当 $s = 1$ 时， $t = 0$ ，且极图是 S_{n-1} ；

（2）当 $s \geq 2$ 时，其中， $k = 2$ 时， $t = 2(s - 1)$ ； $k > 2$ 时， $t = 0$ 。极图是 $K_1 + (I_{n-2s+1} \cup M_{s-1})$ 。

定理 2.3 当 $k \geq 2$, $p \geq 3$ 且 n 充分大时, 有

$$\text{ex}(n, S_k, \{M_{s+1}, C_{2p}\}) = t \binom{n-p+1}{k} + \sum_{i=1}^k t \binom{t-1}{i} \binom{n-t}{k-i} + (n-t) \binom{t}{k} + t_0$$

(1) 当 $s < p$ 时, $t = s$, $t_0 = 0$, 且极图是 $K_s + I_{n-s}$;

(2) 当 $s \geq p$ 时, $t = p-1$, $t_0 = 2 \binom{p-1}{k-1}$, 且极图是 $K_{p-1} + (I_{n-p-1} \cup K_2)$ 。

3 证明

对于一个图 G 和 G 中一点 v , 令 $e(G)$ 表示图 G 的边数, $S_k(G)$ 表示图 G 中星图 S_k 的个数, $S_k^G(v)$ 表示图 G 中以点 v 为中心点的星图 S_k 的个数。下面给出一个定理, 这为我们刻画极图结构有着重要作用。

定理 3.1^[22] 图 G 不含 M_{s+1} 作为子图当且仅当存在一个集合 $B \subseteq V(G)$, 使得 $G-B$ 的所有连通分支 $G_1, \dots, G_m$ 满足

$$|B| + \sum_{i=1}^m \left\lfloor \frac{|G_i|}{2} \right\rfloor \leq s \quad (1)$$

3.1 定理 2.2 证明

证明: 显然 $K_1 + (I_{n-2s+1} \cup M_{s-1})$ 和 S_{n-1} 是不包含 $\{M_{s+1}, C_4\}$ 作为子图的, 因此有

$$\text{ex}(n, S_k, \{M_{s+1}, C_4\}) \geq \binom{n-1}{k} + O(1)$$

下界成立。下面我们证明上界也成立。

令 G 是 $\text{ex}(n, S_k, \{M_{s+1}, C_4\})$ 对应的极图。由于图 G 不包含 M_{s+1} 作为子图, 由定理 3.1, 存在一个集合 $B \subseteq V(G)$ 满足不等式 (1)。令 $G_1, \dots, G_m$ 是 $G-B$ 的所有连通分支。注意到 s 是一个固定的常数, 因此大部分连通分支都是独立点。不失一般性, 我们假设分支 $G_1, \dots, G_l$ 不是独立点。令 N_1 表示中心点在 B 中的 S_k 的个数, N_2 表示中心点在 $G-B$ 中的 S_k 的个数。显然, $S_k(G) = N_1 + N_2$ 。下面对 N_1 和 N_2 分别进行讨论。

首先我们断言 $N_2 = O(n)$ 。这是由于 B 和 $G_1, \dots, G_l$ 的大小是有限的, 因而有

$$N_2 \leq (n - |B|) \binom{|B|}{k} + \sum_{i=1}^l (2e(G_i) \binom{|B|}{k-1} + \sum_{j=2}^k S_j(G_i) \binom{|B|}{k-j}) = O(n)$$

接着我们计算 N_1 。对 B 中任意一点 v , 令 A_v 表示点 v 在 $G-B$ 中的邻域, 即 $A_v = N(v) \cap (V(G) - B)$ 。根据 A_v 的大小, 我们将集合 B 划分为两个子集 R 和 Q , 其中 $R = \{v : |A_v| \geq 2\}$, $Q = \{v : |A_v| = 1\}$ 。此时,

$$N_1 = \sum_{v \in R} \binom{|A_v|}{k} + \sum_{v \in R} \sum_{i=1}^k S_i^B(v) \binom{|A_v|}{k-i} + \sum_{v \in Q} (S_{k-1}^B(v) + S_k^B(v))$$

对于子集 Q 中任意一点 v , 我们断言以点 v 为中心点的 S_k 的个数为 $O(1)$ 。这是因为,

$$\sum_{v \in Q} (S_{k-1}^B(v) + S_k^B(v)) \leq |B| \left(\binom{|B|-1}{k-1} + \binom{|B|-1}{k} \right) \leq s \binom{s-1}{k-1} + s \binom{s-1}{k} = O(1)$$

对于子集 R 中任意一点 v , 都有 $|A_v| \leq n - |B|$ 。此时,

$$N_1 \leq |R| \binom{n-|B|}{k} + |R| \sum_{i=1}^k \binom{|B|-1}{i} \binom{n-|B|}{k-i} = O(n^k)$$

可以发现, 当星图 S_k 在 B 中存在至少一个叶子点时, 满足此条件的 S_k 的个数至多有 $O(n^{k-1})$, 而满足叶子点都在 $G-B$ 中的 S_k 的个数有 $O(n^k)$ 。因此, 当 $k \geq 2$, n 充分大时, n^k 的系数越大, 即 $|R|$ 和 R

中的点在 $G - B$ 中邻域越大, N_1 越大, $S_k(G)$ 越大。下面我们计算 n^k 的系数, 即 N_1 的第一部分 $\sum_{v \in R} \binom{|A_v|}{k}$ 。

我们对子集 R 进行再划分。令 U 为 $G - B$ 中任意子集, $|U| \geq 2$, 记 $D_U = \{v \in R : A_v = U\}$ 。由定义可知, 任意 $U_1, U_2 \subseteq G - B$, 都有 $D_{U_1} \cap D_{U_2} = \emptyset$ 。此外, 由于 B 的大小有限, 因此对于绝大多分子集 U 来说, $|D_U| = 0$ 。设 $G - B$ 中满足 $D_U \neq \emptyset$ 的 U 有 q 个, 分别为 $U_1, \dots, U_q$ 。对任意 $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, $G[D_{U_i}, U_i]$ 是完全二部图。由 $p(F)$ 的定义可知 $p(C_4) = 2$ 。因此, $G[D_{U_i}]$ 是不含 $F[D_{U_i}]$ 中任意图作为子图的, 且 $|D_{U_i}| < \min\{p(C_4), s+1\} = 2$, 即 $|D_{U_i}| = 1$ 。此时,

$$\sum_{v \in R} \binom{|A_v|}{k} = \sum_{i=1}^q |D_{U_i}| \binom{|U_i|}{k} = \sum_{i=1}^q \binom{|U_i|}{k}$$

情况 1: 如果存在某个 U_i 满足 $|U_i| = n - O(1)$, 那么其余所有 U_i 都有 $|U_i| = O(1)$ 。否则, 图 G 包含 C_4 作为子图。此时,

$$\sum_{i=1}^q |D_{U_i}| \binom{|U_i|}{k} = \binom{n - O(1)}{k} + O(1)$$

情况 2: 如果所有 U_i 都满足 $|U_i| = k_i n + O(1)$, 其中 $0 \leq k_i < 1$, 那么 $\sum_{i=1}^q k_i \leq 1$ 。否则, 必存在两个 U_i , 不妨设为 U_1, U_2 , 满足 $|U_1 \cap U_2| = rn$ ($0 < r < 1$)。而 $|D_{U_1} \cup D_{U_2}| = 2$, 此时图 G 必然包含 C_4 作为子图。因此, 由组合数的凸性可知,

$$\sum_{i=1}^q |D_{U_i}| \binom{|U_i|}{k} = \sum_{i=1}^q \binom{k_i n + O(1)}{k} < \binom{n - O(1)}{k}$$

综上所述,

$$S_k(G) \leq \binom{n - O(1)}{k} + O(1)$$

因为极图 G 不包含 $\{M_{s+1}, C_4\}$ 作为子图, 因此 B 中存在唯一一点 v , 它在 $G - B$ 中的邻点有 $n - O(1)$, B 中其余点在 $G - B$ 的邻点个数为 $O(1)$ 。否则, 若 B 中存在两个点满足此条件, 则图 G 必然包含 C_4 作为子图; 若 B 中不存在点满足此条件, 则由情况 2 可知无法达到该上界。考虑 $[v, G - \{v\}]$ 这个划分。若 $s \geq 2$, 此时 $G - \{v\}$ 中包含大部分独立点及有限的非独立点的连通分支。又 $k \geq 2$ 时, 以 $G - \{v\}$ 中任意一点为中心点的 S_k 的个数为 $O(1)$, 从而可知点 v 在 $G - \{v\}$ 中的邻域越大, 图 G 所含 S_k 的个数越多。因此我们可以认为点 v 与 $G - \{v\}$ 中所有点都相邻。对于 $G - \{v\}$ 中非独立点的部分, 易知其不包含 $\{P_3, M_s\}$ 作为子图, 因此 $G - \{v\} = I_{n-2s+1} \cup M_{s-1}$ 。此时, 极图为 $K_1 + (I_{n-2s+1} \cup M_{s-1})$, 对应的极值:

$$\text{ex}(n, S_k, \{M_{s+1}, C_4\}) = \binom{n-1}{k} + t$$

其中, $k = 2$ 时, $t = 2(s-1)$; $k > 2$ 时, $t = 0$ 。若 $s = 1$, 由不等式 (1) 可知, $G - \{v\}$ 为独立集 I_{n-1} , 此时 $t = 0$, 极图为 S_{n-1} 。定理 2.2 证明完毕。

3.2 定理 2.3 证明

定理 2.3 的证明与定理 2.2 类似, 本节我们省去部分相同的证明过程。

证明: 显然, $K_{p-1} + (I_{n-p-1} \cup K_2)$ 和 $K_s + I_{n-s}$ 是不包含 $\{M_{s+1}, C_{2p}\}$ 作为子图的, 下面我们证明它们就是极图。

设图 G 为 $\text{ex}(n, S_k, \{M_{s+1}, C_{2p}\})$ 对应的极图。由定理 3.1 可知, 存在一个集合 $B \subseteq V(G)$ 满足不等式 (1)。令 $G_1, \dots, G_l$ 是 $G - B$ 中非孤立点的连通分支。与 3.1 节同理, 我们首先可以得到 $N_2 = O(n)$, 以及:

$$N_1 = \sum_{v \in R} \binom{|A_v|}{k} + \sum_{v \in R} \sum_{i=1}^k S_i^B(v) \binom{|A_v|}{k-i} + \sum_{v \in Q} \binom{|A_v|}{k} + \sum_{v \in Q} \sum_{i=1}^k S_i^B(v) \binom{|A_v|}{k-i} = \sum_{v \in R} \binom{|A_v|}{k} + O(n^{k-1})$$

其中, N_1 、 N_2 、 A_v 的定义与 3.1 节相同, $R = \{v \in B : |A_v| \geq p\}$, $Q = \{v \in B : |A_v| \leq p-1\}$ 。

接着我们计算 $\sum_{v \in R} \binom{|A_v|}{k}$ 。对集合 R 进行与 3.1 节类似的划分。令 U 为 $G-B$ 中任意子集, $|U| \geq p$,

记 $D_U = \{v \in R : A_v = U\}$ 。同理可知, $G-B$ 中满足 $D_U \neq \emptyset$ 的 U 有有限个, 记为 $U_1, \dots, U_q$ 。对任意 U_i , $G[D_{U_i}, U_i]$ 是完全二部图, 且 $p(C_{2p}) = p$ 。因此, $G[D_{U_i}]$ 是不含 $F[D_{U_i}]$ 中任意图作为子图的, 且 $|D_{U_i}| < \min\{p, s+1\}$ 。令 $t = \max \min\{p-1, s\}$ 。此时,

$$\sum_{v \in R} \binom{|A_v|}{k} = \sum_{i=1}^q |D_{U_i}| \binom{|U_i|}{k}$$

$$\text{断言 3.2.1 } \sum_{i=1}^q |D_{U_i}| \binom{|U_i|}{k} \leq t \binom{n-O(1)}{k}$$

证明: 情况 1: 如果对任意 $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, 都有 $|U_i| = n - O(1)$, 那么 $\sum_{i=1}^q |D_{U_i}| \leq t$ 。否则图 G 必存在 C_{2p} 或 M_{s+1} 作为子图。

情况 2: 如果存在 $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, 使得 $|U_i| = k_i n + O(1)$ ($0 < k_i < 1$), 那么我们可以只考虑 $\sum_{i=1}^q |D_{U_i}| \geq t+1$ 的情况。因为若 $\sum_{i=1}^q |D_{U_i}| \leq t$, 显然有 $\sum_{i=1}^q |D_{U_i}| \binom{|U_i|}{k} < t \binom{n-O(1)}{k}$ 。不失一般性, 我们假设满足 $|U_i| = k_i n + O(1)$ 的 U_i 有 x 个, 设为 $U_1, \dots, U_x$, 其余 $U_{x+1}, \dots, U_q$ 满足 $|U_i| = n - O(1)$ 。易知 $|U_{x+1}| \dots |U_q| = n - O(1)$ 且 $\sum_{i=x+1}^q |D_{U_i}| < t$ 。不妨设 $\sum_{i=x+1}^q |D_{U_i}| = r$, 此时 $\sum_{i=1}^x |D_{U_i}| \geq t - r + 1$ 。

$x=1$ 时, 有 $|U_1| \dots |U_q| = k_1 n + O(1)$ 。当 n 充分大时, 图 G 必然包含 C_{2p} 或 M_{s+1} 作为子图。

$x \geq 2$ 时, 设 $|D_{U_i}| = t_i$ ($i=1, \dots, x$), 显然有 $t_i \leq t - r$ 。对任意 $i \in \{1, \dots, x\}$, D_{U_i} 中的点在 $G-B$ 中的邻域大小为 $k_i n + O(1)$ ($0 < k_i < 1$)。我们断言:

$$\sum_{i=1}^x t_i k_i \leq t - r$$

否则, $D_{U_1} \cup \dots \cup D_{U_x}$ 中必然存在 $t - r + 1$ 个点, 使得其在 $G-B$ 中有 $k' n + O(1)$ ($0 < k' < 1$) 个共同邻点。此时, 图 G 包含 C_{2p} 或 M_{s+1} 作为子图。由组合数的凸性可知,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q |D_{U_i}| \binom{|U_i|}{k} &= \sum_{i=1}^x |D_{U_i}| \binom{k_i n + O(1)}{k} + \sum_{i=x+1}^q |D_{U_i}| \binom{n - O(1)}{k} \\ &= \sum_{i=1}^x t_i \binom{k_i n + O(1)}{k} + r \binom{n - O(1)}{k} \\ &< (t - r) \binom{n + O(1)}{k} + r \binom{n - O(1)}{k} = t \binom{n - O(1)}{k} \end{aligned}$$

因为极图 G 不包含 $\{M_{s+1}, C_{2p}\}$ 作为子图, 所以由断言 3.2.1 可知, 集合 B 中存在且只存在 t 个点, 每个点在 $G-B$ 中的邻域大小都是 $n - O(1)$ 。否则, 若 B 中存在大于 t 个点都满足此条件, 则与断言 3.2.1 的结论矛盾; 若只存在小于 t 个点满足此条件, 则由断言 3.2.1 情况 2 的讨论中可知无法达到其上界, 与极图的最大性矛盾。记这 t 个点构成的集合为 C , 此时 $B-C$ 中的点在 $G-B$ 中的邻域大小为 $O(1)$ 。若 $p \leq s$, 此时 $t = |C| = p-1$, $G-C$ 中包含大部分独立点以及有限个非独立点的连通分支。易知, 中心点在 $G-C$ 中非独立点的连通分支中的 S_k 的个数为 $O(1)$ 。因此 C 中的点在 $G-C$ 中的邻域越大, 图 G 所包含的 S_k 的个数越多。

由此我们可以认为 C 中的点与 $G - C$ 中所有点都相邻。又因为图 G 不包含 $\{M_{s+1}, C_{2p}\}$ 作为子图且 $p \leq s$, 可知 $G - C$ 中非独立点的部分不包含 $\{P_3, 2P_3\}$ 作为子图, 因此该部分至多包含一条边。对于集合 C , $G[C]$ 不包含 $F[C]$ 中任意图作为子图, 且 $|C| = p - 1$, $p(C_{2p}) = p$, 因此有 $F[C] = \{K_p\}$, $G[C] = K_{p-1}$ 。此时, 极图 $K_{p-1} + (I_{n-p-1} \cup K_2)$, 对应的极值为:

$$\text{ex}(n, S_k, \{M_{s+1}, C_{2p}\}) = (p-1) \binom{n-p+1}{k} + \sum_{i=1}^k (p-1) \binom{p-2}{i} \binom{n-p+1}{k-i} + (n-p+1) \binom{p-1}{k} + 2 \binom{p-1}{k-1}$$

若 $p > s$, 此时 $t = s$, 由不等式 (1) 可知 $G - C$ 是独立集。对于集合 C , 同理可知 $G[C] = K_s$ 。因此极图为 $K_s + I_{n-s}$, 对应的极值为

$$\text{ex}(n, S_k, \{M_{s+1}, C_{2p}\}) = s \binom{n-p+1}{k} + \sum_{i=1}^k s \binom{s-1}{i} \binom{n-s}{k-i} + (n-s) \binom{s}{k}$$

定理 2.3 证明完毕。

4 结语

本文研究了不含匹配和偶圈的图中星图的计数问题。利用定理 3.1 以及星图的结构分析, 确定了广义 Turán 数 $\text{ex}(n, S_k, \{M_{s+1}, C_{2p}\})$ 的精确值, 并给出了对应的极图。本文主要研究了 F 是偶圈的情况, 对于其他特殊的二部图 F (例如树、完全二部图等等), $\text{ex}(n, S_k, \{M_{s+1}, F\})$ 的值还有待解决。更进一步, 对于一般的二部图 F , 确定 $\text{ex}(n, S_k, \{M_{s+1}, F\})$ 的值以及刻画其对应的极图, 也是非常有意义的问题。

参考文献

- [1] Diestel R. Graph theory[M].北京:世界图书出版公司北京公司, 2008.
- [2] Alon N, Shikhelman C. Many T copies in H-free graphs[J]. Journal of Combinatorial Theory Series B, 2016, 121: 146-172.
- [3] Chase Z. The maximum number of triangles in a graph of given maximum degree[J]. Advances in Combinatorics, 2020, 10(10): 1-5.
- [4] Ergemlidze B, Methuku A, Sali N, et al. A note on the maximum number of triangles in a H -free graph[J]. Journal of Graph Theory, 2019, 90:227-230.
- [5] Gerbner D. On Turán-good graphs[J]. Discrete Mathematics, 2021, 344: 112445.
- [6] Gerbner D, Győri E, Methuku A et al. Generalized Turán problems for even cycles[J]. Journal of Combinatorial Theory Series B, 2020, 145: 169-213.
- [7] Grzesik A. On the maximum number of five-cycles in a triangle-free graph[J]. Journal of Combinatorial Theory Series B, 2012, 102: 1061-1066.
- [8] Hatami H, Hladký J, Král D et al. On the number of pentagons in triangle-free graphs[J]. Journal of Combinatorial Theory Series A, 2013, 120: 722-732.
- [9] Luo R. The maximum number of cliques in graphs without long cycles[J]. Journal of Combinatorial Theory Series B, 2017, 128: 219-226.
- [10] Ma J, Qiu Y. Some sharp results on the generalized Turán numbers[J]. European Journal of Combinatorics, 2020, 84: 103026.
- [11] Wang J. The shifting method and generalized Turán number of matchings[J]. European Journal of Combinatorics, 2020, 85: 103057.
- [12] Zhu X T, Chen Y. Generalized Turán number for linear forests[J]. Discrete Mathematics, 2022, 345: 112997.
- [13] Zhu X T, Győri E, He Z et al. Stability version of Dirac's theorem and its applications for generalized Turán

- problems[J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 2023, 55: 1857–1873.
- [14] Erdős P, Gallai T. On maximal paths and circuits of graphs[J]. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica, 1959, 10: 337-356.
- [15] Chvátal V, Hanson D. Degrees and matchings[J]. Journal of Combinatorial Theory Series B, 1976, 20(2): 128-138.
- [16] Balachandran N, Khare N. Graphs with restricted valency and matching number[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(12): 4176-4180.
- [17] Abbott H L, Hanson D, Sauer H. Intersection theorems for systems of sets[J]. Journal of Combinatorial Theory Series A, 1972, 12: 381–389.
- [18] Alon N, Frankl P. Turán graphs with bounded matching number[J]. Journal of Combinatorial Theory Series B, 2024, 165: 223–229.
- [19] Gerbner D. On Turán problems with bounded matching number[J]. Journal of Graph Theory, 2024, 106 : 23–29.
- [20] Ma J, Hou X. Generalized Turán problem with bounded matching number[J]. Archive, 2023.
- [21] Zhu X T, Chen Y. Extremal problems for a matching and any other graph[J]. Journal of Graph Theory, 2025, 109: 19-24.
- [22] Berge C. Sur le couplage maximum d'un graphe[J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, 1958, 247: 258–259.

版权声明：©2025 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS