运用辅助元素策略解高考数学题例析

——以 2024 年高考题为例

赵雯雯

扬州大学数学科学学院 江苏扬州

【摘要】辅助元素策略是高中数学中常见且实用的一种解题思路，能够帮助学生在解题过程中构建中间桥梁，将复杂问题逐步转化为清晰可解的步骤，降低思维负担。然而，许多学生对这一策略的理解仍不够深入，缺乏主动运用的意识。本文以高考数学题为例，围绕函数、几何、数列三类常见题型，选取具有代表性的题目进行分析，引导学生在实际解题过程中逐步形成构造辅助元素的思维方式，从而提升对题目结构的把握能力与整体解题的条理性。

【关键词】辅助元素策略；高中数学；解题

【收稿日期】2025 年 5 月 14 日 【出刊日期】2025 年 6 月 18 日 【DOI】10.12208/j.aam.20250015

The application of auxiliary element strategy in solving college entrance examination mathematics problems——taking 2024 college entrance examination questions as examples

Wenwen Zhao

School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】The auxiliary element strategy is a common and practical problem-solving approach in high school mathematics. It helps students build intermediate bridges during problem-solving, gradually transforms complex problems into clear and solvable steps, and reduces cognitive load. However, many students do not fully understand this strategy and lack the awareness to use it actively. Using college entrance examination mathematics problems as examples, this paper focuses on three common types of problems: functions, geometry, and sequences. It selects representative problems for analysis to guide students in gradually forming a way of thinking that involves constructing auxiliary elements during actual problem-solving. This enhances their ability to grasp problem structures and improves the overall coherence of their solutions.

【Keywords】Auxiliary element strategy; Senior high school mathematics; Problem-solving

辅助元素策略是数学解题中一种重要的思维方式，指在解题过程中基于构造思想，根据题目条件适当增加辅助条件，并以此为中介，架起连接条件和结论的桥梁[1]。当学生面对条件复杂、结构隐含、思路受阻的题目时，往往可以借助恰当的辅助元素，将原问题转化为熟悉的模型或较易处理的形式，从而有效推动解题进程。该策略不仅能化解局部难点，还能使整体思路更加清晰，是连接知识点、方法与模型的重要桥梁。它的核心价值在于增强结构理解、丰富模型构建、提升问题处理的条理性。本文即以 2024 年高考题为例，通过对函数、几何与数列题型的分析，探讨辅助元素策略在解题中的具体运用与方法价值。

1 函数题中运用辅助元素策略

函数类问题是高中数学的核心考查内容，题型变化丰富，常融合导数分析、函数单调性、不等式恒成立、极值求解等综合知识。在解题过程中，若直接代入法或常规运算难以推进，往往需要构造辅助函数，这一构造过程本质上是从特殊到一般的过程，之后返回去解决原数学问题又是从一般到特殊的过程[2]。本文选取

2024 年高考中的三道典型函数题，展示辅助函数构造的有效应用。

1.1 构造导函数辅助分析

例 1 （2024 年全国甲卷理科·20）已知函数 $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 0$，求 a 的取值范围。

分析 本题要求“$x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 0$”条件下参数 a 的取值范围，由于该函数含有对数项与乘积项，直接判断其在区间内的取值情况不够直观，通常需借助导数分析其单调性，但由于导函数 $f'(x)=-a\ln(1+x)-\dfrac{(a+1)x}{1+x}$ 结构较复杂，直接判断符号较困难，因此构造 $g(x)=f'(x)$ 作为辅助函数，聚焦于 $g(x)$ 的单调性的分析，从而判断其最小值是否大于等于零，进而确定 $f(x)\geq 0$ 是否成立。通过引入辅助函数的策略，有效简化了对函数整体性质的分析过程。

解 $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$，则 $f'(x)=-a\ln(1+x)-\dfrac{(a+1)x}{1+x}$。令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=\dfrac{-\alpha}{1+x}-\dfrac{a+1}{(1+x)^2}=-\dfrac{ax+2a+1}{(1+x)^2}$。因为当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 0$，且 $f(0)=0,f'(0)=0$，所以 $g'(0)=-1-2a\geq 0$，有 $a\leq -\dfrac{1}{2}$。当 $a\leq -\dfrac{1}{2}$ 时，$g'(x)\leq 0$，故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，故 $g(x)\geq g(0)=0$，即 $f'(x)\geq 0$，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增，故 $f(x)\geq f(0)=0$ 恒成立，即 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$。

通过构造导函数作为辅助函数，该题将复杂函数的性质分析转化为对其导函数单调性的研究。借助这一策略，学生可以更清晰地识别并把握此类问题结构，从而提升分析复杂函数性质的能力。

1.2 构造差函数辅助证明

例 2 （2024 年全国甲卷文科·20）已知函数 $f(x)=a(x-1)-\ln x+1$，若 $a\leq 2$，证明：当 $x>1$ 时，$f(x)<e^{x-1}$ 恒成立。

分析 本题直接分析 $f(x)$ 和 e^{x-1} 的关系较复杂，构造差函数 $g(x)=e^{x-1}-f(x)$ 可将原问题转化为证明 $g(x)>0$，使得问题更易于处理。

解 $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$ 因为 $a\leq 2$，所以当 $x>1$ 时，$e^{x-1}-f(x)=e^{x-1}-a(x-1)+\ln x-1\geq e^{x-1}-2x+\ln x+1$。令 $g(x)=e^{x-1}-2x+\ln x+1$，则 $g'(x)=e^{x-1}-2+\dfrac{1}{x}$。令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，则 $h'(x)>h'(1)=0$，故 $h(x)=g'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，则 $g'(x)>g'(1)=0$，故 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，则 $g(x)>g(1)=0$，故 $e^{x-1}-f(x)>0$，即：当 $x>1$ 时，$f(x)<e^{x-1}$ 恒成立。

该题通过构造差函数，将原命题转化为证明该函数大于零的问题。学生若能熟练掌握构造差函数的策略，将能够更灵活地应对超越函数比较难题，从而提升解题的灵活性与创新能力。

1.3 构造差函数并引入辅助变量替换

例 3 （2024 年天津卷·20）设函数 $f(x)=x\ln x$，若 $f(x)\geq a\left(x-\sqrt{x}\right)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立，求 a 的值。

分析 根据题目条件，可先构造差函数作为辅助函数，将原不等式转化为 $g(x)\geq 0$。通过对 $g(x)$ 求导，确定其单调性并找到最小值点。为求解 a，引入辅助变量替换 $t=\dfrac{a}{2}$，继续构造辅助函数便可迎刃而解，这一过程突出辅助变量替换在求解参数值时的关键作用。

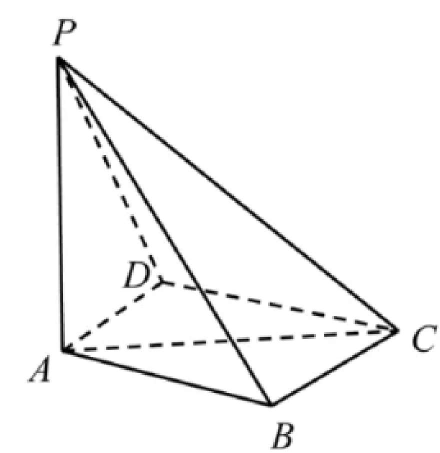
解　由题意知 $x\ln x \ge a\left(x-\sqrt{x}\right)$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，即 $\ln x \ge a\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立。令 $g\left(x\right)=\ln x-a\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\ln x-a+\frac{a}{\sqrt{x}},x\in\left(0,+\infty\right)$，则 $g'\left(x\right)=\frac{1}{x}-a\left(\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)=\frac{2\sqrt{x}-a}{x\sqrt{x}}$。若 $a\le 0$，则 $g'\left(x\right)>0$，故 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，又 $g\left(1\right)=0$，故 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$g\left(x\right)<0$，与 $g\left(x\right)\ge 0$ 矛盾；若 $a>0$，则当 $x\in\left(0,\frac{a^2}{4}\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$；当 $x\in\left(\frac{a^2}{4},+\infty\right)$ 时，$g'\left(x\right)>0$。故 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{a^2}{4}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{a^2}{4},+\infty\right)$ 上单调递增。故 $g\left(x\right)\ge 0$ 恒成立当且仅当 $g_{\min}\left(x\right)=g\left(\frac{a^2}{4}\right)\ge 0$，即 $\ln\frac{a^2}{4}-a+2\ge 0$，即 $\ln\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+1\ge 0$。令 $t=\frac{a}{2}$，$h\left(t\right)=\ln t-t+1,t\in\left(0,+\infty\right)$，则 $h'\left(t\right)=\frac{1-t}{t}$，可知 $h\left(t\right)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减，故 $h_{\max}\left(t\right)=h\left(1\right)=0$，故 $h\left(\frac{a}{2}\right)\le 0$，当且仅当 $a=2$ 时等号成立。又 $h\left(\frac{a}{2}\right)\ge 0$，所以 $h\left(\frac{a}{2}\right)=0$，故 a 的值为 2。

通过构造差函数并引入辅助变量替换，本题巧妙地将恒成立问题转化为对新函数的分析。借助这种策略，学生可以灵活解决含参数的恒成立问题，进而提升综合解题能力。

2 几何题中运用辅助元素策略

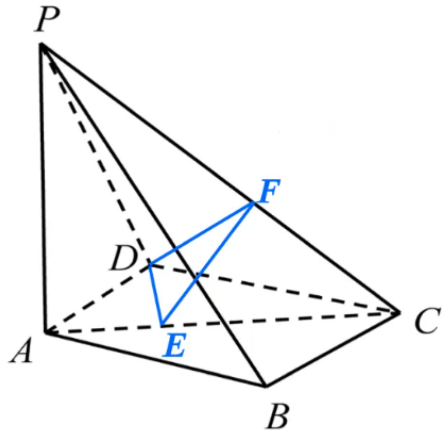
几何问题是高考数学中典型的综合题型，其题设往往隐含着复杂的空间关系或对称结构，直接套用公式难以入手。而添加辅助线的实质正是将不完整的基本图形补充完整的问题[3]，面对此类问题，恰当地构造辅助线、辅助平面、辅助向量或辅助点，是理清关键几何关系的有效手段。本文聚焦 2024 年高考中的一道几何题，从辅助构造角度剖析解题路径。

例 4 （2024 年全国新高考Ⅰ卷·17）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$。若 $AD\perp DC$，且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$，求 AD。



分析　本题一般通过建立空间直角坐标系结合法向量求解，也可从纯几何角度，结合二面角的定义，作出二面角的平面角作为辅助元素，根据三角形面积求出对应边长，在三角形中表示正弦值，求出 AD 长度。

解 如下图所示，过 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E，过点 F 作 $EF\perp PC$ 于点 F。



由于 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA\subset 面PAC$，故 $面PAC\perp 面ABCD$。由于

$$\begin{cases}面PAC\perp 面ABCD\\ 面PAC\cap 面ABCD=AC\\ DE\perp AC\\ DE\subset 面ABCD\end{cases},$$

故 $DE\perp 面PAC$，又 $PC\subset 面PAC$，故 $PC\perp DE$。由于

$$\begin{cases}PC\perp DE\\ PC\perp EF\\ DE\cap EF=E\\ DE\subset 面DEF\\ EF\subset 面DEF\end{cases},$$

故 $PC\perp 面DEF$，则有 $PC\perp EF$，$PC\perp DF$，所以 $\angle DFE$ 为二面角 $A-CP-D$ 的平面角，$\sin\angle DFE=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$。设 $AD=m$，在 $Rt\triangle ADC$ 中，$DE=\dfrac{DA\cdot DC}{AC}=\dfrac{m\sqrt{4-m^2}}{2}$。由于 $DC\perp 面PAD$，故在 $Rt\triangle PCD$ 中，$DF=\dfrac{DP\cdot DC}{PC}=\dfrac{\sqrt{4+m^2}\sqrt{4-m^2}}{2\sqrt{2}}$。在 $Rt\triangle DEF$ 中，$\sin\angle DFE=\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{4+m^2}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，求得 $m=\sqrt{3}$，即 $AD=\sqrt{3}$。

几何问题中，当直接处理空间关系或角度存在困难时，构造恰当的辅助元素是破题的关键。该题通过作出二面角的平面角，将抽象的空间角问题转化为可计算的平面三角形问题，显著简化了求解 AD 长度的过程。这体现了辅助元素在揭示隐藏关系、搭建计算桥梁方面的核心作用。掌握这种构造能力，能有效提升解决复杂几何问题的效率。

3 数列题中运用辅助元素策略

在涉及离散量，特别是可将函数值视为数列的问题中，辅助元素策略同样适用。其核心在于构造辅助数列或借助辅助变量与关系，帮助分析目标数列的性质，例如范围或有界性，以及验证或否定特定结论。这种策略在选项判断中尤为有效，例如 2024 年全国新高考I卷第 8 题。

例 5 （2024 年全国新高考I卷·8）已知函数的定义域为R，$f\left(x\right)>f\left(x-1\right)+f\left(x-2\right)$且$x<3$时$f\left(x\right)=x$，则下列结论中一定正确的是

$A.f\left(10\right)>100$ $B.f\left(20\right)>1000$ $C.f\left(10\right)<1000$ $D.f\left(20\right)<10000$

分析 由于本题需要探求正整数对应的函数值的范围，故分析过程仅涉及到自变量为正整数的情况，可视为一个数列题。通过排除法即可快速解决，由题意知这个数列不能存在上界，由此排除 C 项与 D 项，之后可构造一个满足题目条件但$f\left(10\right)<100$的数列，从而排除 A 项。

解 根据定义域为R且$f\left(x\right)>f\left(x-1\right)+f\left(x-2\right)$可知$f\left(x\right)$无上界，则 C 项与 D 项排除。由于$x<3$时$f\left(x\right)=x$，故$f\left(0\right)=0$，$f\left(1\right)=1$，$f\left(2\right)=2$。现需要找到一个递推关系，使得$f\left(x\right)>f\left(x-1\right)+f\left(x-2\right)$对于$x\geq 3$成立，设$a$为常数，$f\left(x\right)=f\left(x-1\right)+f\left(x-2\right)+a$，由于$f\left(10\right)$要尽量小，故这一递推关系应使得$f\left(x\right)$的增长速度减慢，即$a$需要尽量小，设$a=0.1$，根据递推关系计算可得$f\left(10\right)=94.4<100$，则通过构造的这一数列可排除 A 项。综上，本题正确选项为 B 项。

在数列问题中，针对性地构造辅助反例是排除错误选项、确定正确答案的高效手段。数列构造作为数学学习中重要的方法与技巧[4]，借助恰当的辅助数列，可将抽象的离散性质判断变得具体可操作。通过设计恰当的辅助数列，可以直观地验证或否定特定结论，从而有效缩小探索范围。这种方法不仅使复杂问题简化，还帮助学生更准确地把握数列性质，提升解题效率。

4 结语

辅助元素策略在高考数学解题中具有重要作用。教师在教学中应引导学生从新的角度观察和分析问题，抓住条件与结论的内在联系构造出有关的辅助元素[5]，教会他们如何根据问题特点灵活选择辅助元素的方法，如构造辅助函数、辅助线、辅助平面等，帮助学生理清解题思路，突破思维瓶颈。同时，学生需在日常学习中主动积累相关经验，通过大量针对性练习，提升对辅助元素的敏感性和运用熟练度。在遇到难题时，学生要养成主动思考如何构造辅助元素的习惯，借助这一策略将复杂问题转化为熟悉模型，从而准确找到解题方向。教师和学生都应认识到辅助元素策略在数学解题中的重要价值，共同在教学和学习过程中充分发挥其作用，以提高学生的数学思维能力和解题水平。

参考文献

[1] 傅海伦,付晴.构造辅助元素在解决数学问题中的探究[J].中小学数学(高中版),2020,(06):50-53.

[2] 吴维群.构造辅助函数法在中学数学中的应用[J].中学生理科应试,2014,(12):1-2.

[3] 羌锋建. 重新定义辅助线，让几何教学更合理——从一道几何题的解法谈辅助线的教学[J]. 教学方法创新与实践, 2025, 4(01): 22－24.

[4] 房增凤.合理构造,巧解数列[J].高中数理化,2024,(03):17-18.

[5] 喻文琳.基于“构造法”的高中数学解题思路探索[J].数学之友,2025,(01):53-56.