

数形结合思想在二次函数教学中的应用研究

——以一道中考抛物线综合题为例

义诗瑛

扬州大学 江苏扬州

【摘要】数形结合思想是解决二次函数综合问题的核心策略，能够有效联结几何直观与代数推理，显著提升解题效率。本文以上海中考的一道抛物线综合题为切入点，深入探究数形结合思想在二次函数问题中的应用。研究首先拆解原题，该题以抛物线为背景，融合等腰直角三角形的几何性质，考查函数图像与几何图形的综合运用能力；通过坐标设定、方程建立、分类讨论等步骤，将几何特征转化为代数方程，并借助函数图像验证解的合理性，充分体现数形结合的典型应用特征。在此基础上，研究设计了改变几何图形、调整参数范围、引入动态条件等5类变式题目，验证了所提思维模型的普适性。最后，提炼出解决二次函数综合问题的四步通用方法：图形特征提取、代数模型构建、数学运算求解、几何验证优化，并强调数形互译在每一步中的关键作用。本研究不仅为二次函数教学提供理论参考，更通过具体案例展现数形结合思想的实践价值，有助于培养学生的直观想象、逻辑推理等数学核心素养，未来可进一步探索该思想在更高维度数学问题中的应用。

【关键词】数形结合；二次函数；抛物线；等腰直角三角形；解题策略

【收稿日期】2026年3月16日

【出刊日期】2026年4月20日

【DOI】10.12208/j.ije.20260031

Research on applying the combination of number and shape to quadratic function teaching

——A case of comprehensive parabola problem in high school entrance examination

Shiyang Yi

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】The idea of combining number and shape is a core strategy for solving comprehensive problems of quadratic functions. It effectively connects geometric intuition and algebraic reasoning, and greatly improves problem-solving efficiency. Taking a comprehensive parabola problem from the Shanghai High School Entrance Examination as a starting point, this paper deeply explores the application of the number-shape combination idea in quadratic function problems. First, the study deconstructs the original problem, which is set against the background of parabola and integrates the geometric properties of isosceles right triangles to assess students' ability to use function graphs and geometric figures comprehensively. Through coordinate setting, equation establishment and classified discussion, geometric features are transformed into algebraic equations, and the rationality of solutions is verified by function graphs, fully reflecting the typical application characteristics of number-shape combination. On this basis, five types of variant problems are designed, including changing geometric figures, adjusting parameter ranges and introducing dynamic conditions, so as to verify the universality of the proposed thinking model. Finally, a four-step general method is refined: extracting graphic features, constructing algebraic models, solving through mathematical calculation, and optimizing by geometric verification, with emphasis on the key role of mutual translation between number and shape in each step. This study not only provides theoretical references for quadratic function teaching, but also demonstrates the practical value of the number-shape combination idea through concrete cases, which helps to cultivate students' core mathematical competencies such as intuitive imagination and logical reasoning. Further exploration can be made on the application of this idea in higher-dimensional mathematical problems in the future.

【Keywords】Combination of number and shape; Quadratic function; Parabola; Isosceles right triangle; Problem-solving strategy

1 引言

1.1 研究背景

数形结合思想是一种综合性的思维方式，是解决数学问题的重要思想方法^[1]。在二次函数教学中应用数形结合思想，不仅可以帮助学生深入理解函数的概念、性质等，还能引导学生运用这一思想方法解决相关问题，提升数学综合素养^[2]。因此，研究数形结合思想在二次函数问题中的应用，对提升学生的数学思维能力和解题能力具有重要的实践意义。

近年来，中考数学试题愈发注重对学生综合能力的考查，函数与几何综合题成为高频题型。上海中考数学试卷中的抛物线综合题便是典型代表，该题以二次函数为背景，结合等腰直角三角形的几何性质，要求学生通过坐标计算、方程求解、图形分析等方式确定符合条件的点的坐标，既考查代数运算能力，又检验几何直观与逻辑推理能力，充分体现数学学科核心素养的考查要求。然而在实际教学中，学生解决此类问题时普遍存在困难。因此，如何引导学生合理运用数形结合思想，建立“几何一代数”双向思维模式，成为中学数学教学中亟待解决的问题。

基于此，本研究选取上海中考抛物线综合题为案例，通过深入分析解题思路、设计变式训练、归纳通用解题策略，旨在为教师提供可操作的教学参考，帮助学生掌握数形结合思想在二次函数问题中的实际应用方法。

1.2 问题提出

尽管数形结合思想在二次函数问题解决中具有重要作用，但学生在实际解题过程中仍面临诸多挑战：如何将等腰直角三角形性质等几何条件准确转化为代数方程？如何在不同变式问题中灵活运用数形结合策略？针对上述问题，本研究以上海中考抛物线综合题为载体，探讨以下核心问题：

(1) 如何通过变式训练强化学生数形结合思想的应用能力？

(2) 如何提炼通用解题策略，提升学生解决二次函数综合问题的效率？

通过对上述问题的研究，旨在为数学教学提供系统化的解题方法，促进学生对数形结合思想的深入理解与灵活运用。

2 原题解析与数形结合思想体现

2.1 问题重述

本题是上海中考的一道二次函数综合题，以抛物线为载体，结合几何图形性质，考查数形结合思想的应

用。原题呈现如下：

已知抛物线 $y = ax^2 + c (a \neq 0)$ 过点 $P(3,0)$ 和 $Q(1,4)$ 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点 A 在直线 PQ 上且在第一象限内。过 A 作 $AB \perp x$ 轴于点 B ，以 AB 为斜边在其左侧作等腰直角三角形 ABC 。

①若 A 与 Q 重合，求 C 到抛物线对称轴的距离；

②若点 C 恰好落在抛物线上，求 C 的坐标。

题目分为两个主要部分：第一部分是解析式求解，已知抛物线方程，且抛物线经过两点，要求根据给定的点坐标，求出抛物线的解析式。这一问需要学生通过待定系数法，将点坐标代入抛物线方程，建立方程组并求解参数 a 和 c ，从而确定抛物线的具体表达式。第二部分是几何综合应用，在求出抛物线解析式的基础上，题目进一步结合几何图形进行拓展。第一问需要学生先明确抛物线的对称轴，再根据等腰直角三角形的性质确定点 C 的坐标，最后计算距离。第二问是本题的核心难点，需要综合运用几何与代数方法：首先，根据直线 PQ 的方程表示点 A 的坐标；其次，利用等腰直角三角形的性质推导点 C 的坐标表达式；最后，将点 C 的坐标代入抛物线方程，建立方程并求解，同时结合第一象限的条件筛选合理答案。题目通过层层递进的设计，将函数、几何与代数运算紧密结合，充分体现了数形结合思想在解决综合问题中的重要性。

2.2 解题过程

(1) 求解析式——代数运算基础

将 $P(3,0)$ ， $Q(1,4)$ 两点分别代入 $y = ax^2 + c$ ，得

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ c = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

\therefore 抛物线的解析式是 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$ 。

此步骤体现了数形结合思想：代数系数 a ， b ， c 决定了抛物线的开口方向、宽度及顶点位置，为后续几何构造提供了代数基础。

(2) 几何构造问题

①抛物线的对称轴是 y 轴，当点 A 与点 $Q(1,4)$ 重合时，

$\therefore A(1,4)$ ， $\therefore AB \perp x$ 轴， $\therefore AB = 4$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是 AB 为斜边的等腰直角三角形，

$\therefore C$ 点到 AB 的距离为 2。

∵ 抛物线的对称轴是 y 轴, ∴ C 点到抛物线的对称轴的距离等于 1。

此步骤体现了数形结合思想: 将几何图形的特征转化为坐标关系, 通过代数方式表达和分析几何问题, 实现了几何与代数的相互转化与结合。

② 设直线 PQ 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{由 } P(3,0), Q(1,4), \text{ 得 } \begin{cases} 3k + b = 0, \\ k + b = 4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = -2, \\ b = 6. \end{cases}$$

∴ 直线 PQ 的解析式为 $y = -2x + 6$,

设 $A(m, -2m + 6)$, ∵ $AB \perp x$ 轴, ∴

$$AB = -2m + 6.$$

∵ $\triangle ABC$ 是 AB 为斜边的等腰直角三角形,

∴ C 点到 AB 的距离为:

$$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}(-2m + 6) = -m + 3$$

$$\therefore y_c = -m + 3, x_c = -(-m + 3 - m) = 2m - 3.$$

$$\text{将点 } C(2m - 3, -m + 3) \text{ 代入 } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2},$$

$$\text{得 } -m + 3 = -\frac{1}{2}(2m - 3)^2 + \frac{9}{2}.$$

整理, 得 $2m^2 - 7m + 3 = 0$,

$$\text{解得 } m = \frac{1}{2}, \text{ 或 } m = 3 \text{ (与点 } P \text{ 重合, 舍去)}.$$

$$\text{当 } m = \frac{1}{2} \text{ 时, } 2m - 3 = 1 - 3 = -2,$$

$$-m + 3 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}.$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标是 } \left(-2, \frac{5}{2}\right).$$

此步骤体现了数形结合思想: 用参数方程描述动态几何过程, 把图形的位置关系、运动轨迹转化为可计算的代数表达式, 实现了“以数解形”, 用代数方法精准解决几何问题。

3 变式设计与方法迁移

3.1 变式设计原则

3.1.1 改变几何图形类型

核心思想: 替换等腰直角三角形为其他几何图形, 考察不同几何性质的代数化能力。示例: 若改为等边三角形, 需利用其“三边相等、高线性质”建立方程; 若改为矩形, 且其边与坐标轴平行, 则可利用顶点坐标之

间的平移关系建立方程; 若矩形非轴对齐, 则需结合对角线中点相同及边长关系进行代数化。

教学价值: 训练学生提取不同图形的核心几何特征, 并转化为代数约束条件。

3.1.2 改变相对位置关系

核心思想: 调整构造方向、对称轴位置或图形象限, 打破思维定势。示例: 将“左侧构造等腰直角三角形”改为右侧构造, 则点 C 坐标变为 $(2t - 3, t - 3)$; 若抛物线对称轴变为 $x = 1$, 则距离计算需重新定位。

教学价值: 强化空间变换能力, 避免机械套用解题模板。

3.1.3 改变约束条件

核心思想: 引入面积、周长、角度等附加条件, 增加问题复杂性。示例: 要求 $\triangle ABC$ 的面积为定值。如 $S = 4$, 则需建立 $\frac{1}{2}(\text{直角边})^2 = 4$ 的方程; 限定点 C 在第四象限, 需增加坐标符号约束。

教学价值: 培养学生综合处理多条件的能力, 体现数形结合的灵活性。

3.1.4 增加参数维度

核心思想: 引入动态参数, 如旋转角 θ , 拓展为探索性问题。示例: 等腰直角三角形绕点 A 旋转 30° , 则点 C 坐标需用旋转公式:

$$\begin{cases} x_C = x_A + (x_B - x_A)\cos\theta + (y_B - y_A)\sin\theta \\ y_C = y_A + (x_B - x_A)\sin\theta + (y_B - y_A)\cos\theta \end{cases}$$

教学价值: 衔接高中解析几何思想, 提升参数化建模能力。

3.1.5 逆向设计

核心思想: 从已知结论反推参数, 如“点 C 在抛物线上”, 反求 a 的范围。示例: 若点 C 恒在抛物线内部, 求参数 a 的取值范围; 若存在两个满足条件的 C 点, 求直线斜率 PQ 的范围。

教学价值: 训练逆向思维和存在性讨论能力, 深化对代数关系几何意义的理解。

3.2 方法迁移策略

3.2.1 迁移至同类问题

几何图形替换: 将等腰直角三角形迁移至正方形时, 利用“邻边垂直且相等”的性质, 设点 C 坐标为 $(x_A \pm AB, y_A \pm AB)$; 迁移至菱形时, 需结合“对角线垂直平分”建立方程组。参数扩展: 若抛物线改为 $y = ax^2 + bx + c$, 可迁移对称轴公式, 并调整点坐标表达式。

3.2.2 迁移至高阶知识

高中衔接：旋转问题可迁移旋转矩阵或复数法求解；面积最值问题可迁移微积分思想，结合函数导数求极值。跨模块整合：与向量结合，以向量的形式表示直角等腰条件；与圆结合，若点 C 在定圆上，需联立圆与抛物线方程。

3.2.3 迁移至教学实践

变式训练设计，见表 1。

3.2.4 技术融合迁移

动态软件验证：用几何画板演示点 A 在直线 PQ 上滑动时点 C 的轨迹，直观发现其落在抛物线上的临界位置；通过 GeoGebra 调整参数 a ，观察点 C 位置与抛物线开口的关系。

表 1 变式训练设计

变式类型	题目改造要点	能力培养目标
图形替换	等腰三角形→矩形	几何性质提取能力
逆向条件	“点 C 在抛物线上” → “求 a 的范围”	参数分析能力
动态参数	引入旋转角 θ	运动变换思想

4 通用解题方法归纳

对于以二次函数为背景的参数问题，我们要明确解题的基本思路就是利用数形结合思想，分析参数对点、线段或抛物线位置的影响，同时关注特殊点（如端点、抛物线顶点等）分类讨论问题^[3]。本文归纳出适用于此类问题的四步解题框架：几何条件代数化、建立参数方程、坐标转换、方程求解与验证，为解决二次函数与几何结合的动点、存在性、最值等题型提供清晰的路径。

4.1 几何条件代数化——搭建代数桥梁

核心目标：将题目中的几何约束精准翻译为代数方程或不等式。原则：选择最直接、计算量最小的代数形式表达几何本质。例如明确等腰直角三角形的直角位置，是实现几何条件准确代数化的关键。

4.2 建立参数方程——引入变量描述动点

核心目标：对问题中的核心动点用一个或多个参数进行坐标参数化。示例：（1）选择参数化依据，轨迹已知，点在已知直线或曲线上运动，用该线方程参数化。轨迹未知但受约束，根据已知几何约束设置参数。关联点驱动，动点位置由另一动点的运动决定，先参数化主动点。（2）设定参数范围，根据实际几何意义确定参数的取值范围，避免后续解无效。原则：参数选择应使后续坐标转换和方程建立尽可能简便。通常一个参数能描述核心动点轨迹。

4.3 坐标转换——构建目标代数表达式

核心目标：利用几何关系和第一步的代数化条件、第二步的参数化坐标，推导出与问题目标相关的所有点的坐标表达式。示例：（1）利用几何关系，中点、对称点、向量平移、旋转、相似、垂直平分线、角平分线性质的性质等。（2）建立目标表达式，明确最终需要求解

的对象，并用含参数的代数式表示出来。原则：步步为营，从已知点、参数化点出发，依据清晰的几何关系逐步推导目标点坐标。向量工具常能简化计算。

4.4 方程求解与验证——锁定有效解

核心目标：将第三步得到的目标表达式代入第一步几何条件代数化得到的约束方程，解关于参数的方程组，并结合定义域和几何限制筛选有效解。示例：（1）代入方程求解，若求轨迹方程，消去参数 t ；若求特定点或存在性，将目标点坐标代入几何约束方程解 t ；若求最值，建立目标函数，在 t 的定义域内求极值。（2）解的验证，参数范围，检查解得的 t 是否在第二步设定的定义域内；几何合理性，将 t 代回坐标，检查是否满足原始几何条件；多解讨论，注意几何条件可能对应多种情形，需分类讨论并逐一验证；轨迹限制，消参得到的轨迹方程，需结合参数范围明确其有效范围。原则：解方程是手段，验证是保证结果正确的关键。务必结合几何意义和参数范围进行双重检验。

5 教学建议与展望

5.1 教学建议

上海中考抛物线综合题清晰揭示了数形结合思想在破解二次函数难题中的核心价值。在解决二次函数问题时，数形结合思想将抽象的函数表达式与直观的函数图象紧密结合，让学生能够透过“数”的精确性来深入理解“形”的特征，同时借助“形”的直观性去把握“数”的本质^[4]。基于本案例的深度剖析，提炼出以下二次函数教学启示：

（1）深化认知构建，夯实数形结合基础

首先在二次函数问题常涉参数变化，教师需培养学生建立“动态图式”，在脑海中或草稿上模拟图象随参数变化的连续过程，理解临界状态，将抽象“变”化

为可视“动”。综合问题常需寻找几何关系成立的临界条件。其次教学中应引导学生将几何条件精确代数化,在图象上精准定位这些“关键帧”,理解临界点是数形融合的枢纽。

(2) 优化教学策略,培养数形结合思维

一是实施“可视化”先行策略,在用代数方法求解复杂问题比较困难时,学生可以通过绘制图象,将抽象的数学关系具象化,更直观地理解问题,从而简化问题并找到新的解题思路^[5]。例如在讲解上海题时,教师应要求学生首先绘制坐标系与抛物线的草图,并在图中标注已知点 $P(3,0)$ 、 $Q(1,4)$ 及对称轴,引导其观察几何关系与代数表达之间的对应点。二是采用“分阶段”问题驱动教学,第一阶段以形导方向,提问“观察图形,哪些几何特征可能决定解题方向?”引导学生挖掘对称性、特殊角、等量关系等几何线索;第二阶段以数定精确,提问“如何用坐标和方程精确刻画这些几何特征?”实现几何条件的代数转化;第三阶段数形互验,提问“代数求解的结果在图形上如何体现?是否合理?”引导学生验证解的几何合理性。

(3) 融合技术赋能,提升数形结合体验

新时代,教育改革将信息技术与数学课程进行整合,而 GeoGebra 软件的教学价值在数形结合思想教学中体现得最为淋漓尽致,这也是在初中数学教学中有效运用 GeoGebra 的意义所在^[6]。运用 GeoGebra 等工具实时演示参数变化对二次函数图象及交点、面积等的影响。在上海题的变式教学中,拖动点 P ,让学生直观观察三角形面积变化过程,感受最值点位置,验证代数求解结果,强化“过程”可视化。通过观察和分析二次函数图象,学生能够更加直观地理解二次函数的性质,并将其与代数表达式联系起来,从而在实际问题中灵活运用^[7]。

(4) 完善评价反馈,落实数形结合素养

关注“转化”能力,在习题批改和课堂评价中,不仅看答案正确与否,更要关注学生是否有效运用了数形结合思想。重点评价:示意图是否合理且辅助了思考?几何条件是否被正确转化为代数语言?代数结果是否回到图形进行了验证或解释?设计“说题”环节,要求学生讲解解题思路,尤其阐述在何处、如何运用了图象信息引导代数推导,或如何利用代数计算解决图形难题。通过“说”促进“思”的清晰化和策略的元认知。在中学数学习题课中,如能合理地加入一些有利于培养与考查学生创新意识、创新思维和应用能力的开放性问题、探究性问题,则可以更好地提高习题课的教学

有效性,真正关注学生自身的各项能力发展,从而更好地培养学生的探索精神和创造能力^[8]。

上海中考抛物线题犹如一座微缩景观,清晰映射出数形结合思想在二次函数高阶思维培养中的基石地位。二次函数教学的启示绝非止步于解题技巧的传递,更在于重塑学生对数学本质的认知方式。教师应在日常的教学过程中,通过引导学生准确理解二次函数的图象及其性质,找准解题的突破口并正确地进行数形之间的转化,让学生逐步掌握运用数形结合思想解题的方法,实现学生数学素养的提高^[9]。发展灵活性与创造性的核心数学素养,真正领悟“数形结合”的深刻内涵。正如华罗庚所说“数无形时少直觉,形少数时难入微”,二次函数的图象会告诉我们二次函数系数之间的关系以及更多的有用信息^[10]。

5.2 展望

本研究以中考抛物线综合题为例,探索了数形结合思想在二次函数教学中的应用路径、变式设计及解题策略,为课堂教学提供了可操作的实践参考。但在课堂落地、教师教学、学生学习等层面仍有较大拓展空间,未来可围绕课堂实践优化、教师专业发展、学生素养提升三个维度持续深化研究,让数形结合思想真正融入日常教学、服务学生成长。

在课堂实践层面,可将研究成果转化为常态化教学流程,把“图形特征提取、代数模型构建、运算求解、几何验证”四步法融入课堂例题、习题与复习课,形成固定教学范式。同时完善分层变式训练体系,针对基础薄弱、中等、拔尖学生设计不同难度的几何转化、参数分析、动态探究题目,让不同层次学生都能在数形结合中获得提升。此外,可将 GeoGebra 等动态软件常态化用于课堂演示,让动点轨迹、图形变换、参数影响直观可见,降低学生理解门槛,提升课堂效率。

在教师教学层面,未来可开展校本教研与专题培训,围绕二次函数与几何综合问题,帮助教师提升几何条件代数化、动态问题分析、变式题设计等能力。鼓励教师结合本班学情,自主改编中考真题,打造本土化教学案例,使教学策略更贴合实际课堂。同时推动教师开展教学反思与行动研究,记录学生在数形转化中的常见错误,形成错题库与教学改进方案,提升教学针对性。

在学生学习层面,可从解题训练转向思维培养,引导学生主动画图、用图、析图,养成“以形助数、以数解形”的习惯。加强逆向思维、分类讨论、参数化思想的训练,提升学生解决动态几何问题的能力。建立过程性评价机制,关注学生绘图、转化、验证、表达等全过

程表现,而非仅看答案对错,全面促进直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养发展。

未来研究将继续扎根课堂、服务教学,不断完善数形结合教学体系,为提升初中数学教学质量、促进学生深度学习提供更扎实的实践支撑。

参考文献

- [1] 王丽.数形结合思想在初中数学解题中的应用——以“二次函数与几何图形”问题为例[J].数理化解题研究,2024,(02):38-40.
- [2] 罗廷美.数形结合思想在初中数学教学中的应用——以“二次函数”为例[J].中学课程辅导,2025,(16):72-74.
- [3] 刘勤凤.数形结合巧解题强化本质促思维——以“二次函数参数取值范围问题”为例[J].中学数学教学参考,2025,(06):63-65.
- [4] 代鑫蕊,陈纪彤.数形结合思想在求解二次函数题中的妙用[J].数理化学学习(初中版),2026,(02):17-19.
- [5] 兰心雨,廖秋菊.数形结合,以简驭繁——对一道中考压轴题的解法探究[J].数理天地(初中版),2024,(16):14-15.
- [6] 盛思佳,赵育林.利用 GeoGebra 软件辅助数形结合思想教学——以二次函数图像平移规律教学设计为例[J].中国教育技术装备,2022,(11):35-38.
- [7] 何腾飞.初中数学函数图象中数形结合思想的应用——以一道二次函数动点问题为例[J].数理天地(初中版),2024,(19):22-23.
- [8] 顾健.利用数形结合求解不同类型的二次函数问题探索[J].数学之友,2022,36(15):54-56+59.
- [9] 黄清山.运用数形结合思想处理初中数学二次函数问题的探究[J].新课程,2022,(19):42-44.
- [10] 谢成强.数形结合思想在二次函数问题中的巧用[J].数理天地(初中版),2024,(01):4-5.

版权声明: ©2026 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS