

3-CRC 并联机构运动学分析

刘平安, 张利华, 沈先江, 徐小良

南昌职业大学 江西南昌

【摘要】针对一种空间纯转动的并联机器人 3-CRC, 基于空间两轴线始终保持垂直的位置关系特点, 求得该机构的位置反解显式表达式。利用析配消元法得出位置正解的求解方法。最后带入数值计算得出动平台在平稳运动状态下输入关节的运动曲线。

【关键词】并联机构; 正反解分析; 3-CRC

【收稿日期】2025 年 11 月 15 日

【出刊日期】2025 年 12 月 30 日

【DOI】10.12208/j.jer.20250417

Kinematics analysis of 3-CRC parallel mechanism

Pingan Liu, Lihua Zhang, Xianjiang Shen, Xiaoliang Xu

Nanchang Vocational University, Nanchang, Jiangxi

【Abstract】 A 3-CRC parallel mechanism with three pure rotations is presented in this paper. Its positional inverse expression has been established based on the special position in which two spatial axes are vertical to each other, and the forward kinematical solution is also obtained with Sylvester's elimination approach. Finally, a case study is provided with the position curve of the driving joints to verify the validity of the analysis.

【Keywords】 Parallel mechanism; Forward & inverse kinematic analysis; 3-CRC

引言

并联机器人具有承载能力强, 输出精度高等一系列特点^[1-3]。近年来并联机器人的应用在众多领域获得了进一步的拓展, 尤其少自由度并联机器人的设计开发与应用一直是一个国际工程界热点^[4-6], 使得人们对并联机构的研究要求更加深入, 运用领域也将更加广泛。在日常应用中以三自由度为代表的少自由度并联机器人更具有实际意义。纯转动三自由度并联机器人以 3-RRR 机构为代表^[7-9], 目前已经有了比较深入的研究和探索。为了丰富机构种类, 本文选取了一种新型并联机器人-3RCR 型并联机器人对其运动特性进行研究分析。

如图 1 所示为 3-CRC 并联机构构型图, 它由三条对称 CRC (C 代表圆柱副, R 代表转动副) 支链将动平台和静平台联接起来, 动平台具有三个转动自由度。

1 机构的反解分析

1.1 机构的描述

3-CRC 球面并联机器人机构如图 1 所示, 每条支链上由圆柱副分别与动平台和定平台相连, 中间由转动副连接。单条支链的侧视图, 俯视图分别如图 2 和

图 3 所示。其中所有圆柱副的轴线都相交于一点 O, 中间转动副的轴线均垂直于所在支链上两端圆柱副的轴线。

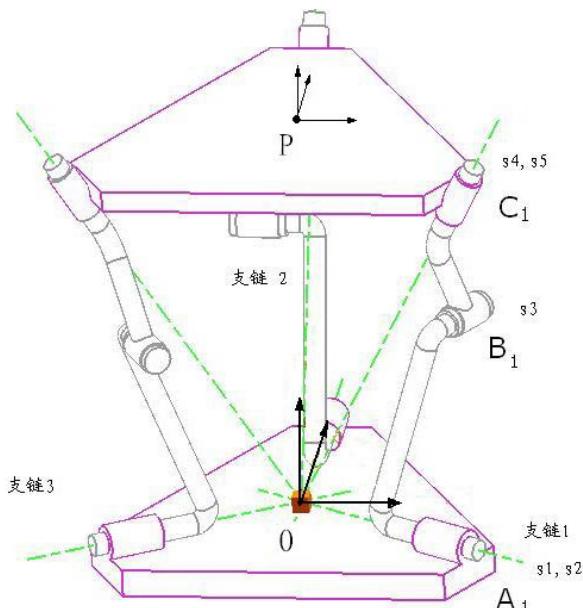


图 1 3-CRC 并联机构结构

第一作者简介: 刘平安 (1962-) 男, 南昌职业大学工程技术学院教授, 研究方向: 机械设计及理论。

在静平台中心 O 点建立基础坐标系 O-xyz, A_i 在坐标系 O-xyz 分别为 ${}^0A_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}b, -\frac{b}{2}, 0)^T$, ${}^0A_2 = (0, b, 0)^T$, ${}^0A_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}b, -\frac{b}{2}, 0)^T$; 初始状态下 C_i 在 O-xyz 分别为 ${}^0C_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{a}{2}, z)^T$, ${}^0C_2 = (0, a, z)^T$, ${}^0C_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{a}{2}, z)^T$ (a 和 b 分别为动、静平台中心至各运动副 A_i, C_i 中心距离, z 为动平台在起始位置时, C 点在 Z 向距离)。根据机构的结构特点有轴线 $s_3 \perp s_2$ 、 $s_3 \perp s_4$, 可知机构支链在运动过程中轴线 s_3 轴始终与轴线 s_2 、 s_4 确定的平面保持垂直。

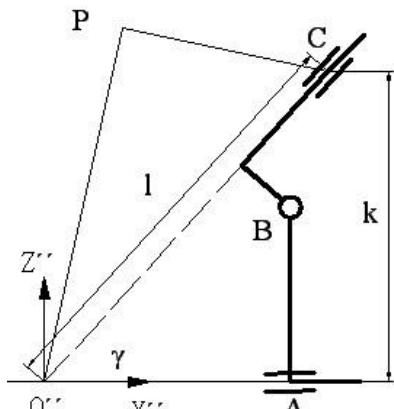


图 2 单条支链的侧视图

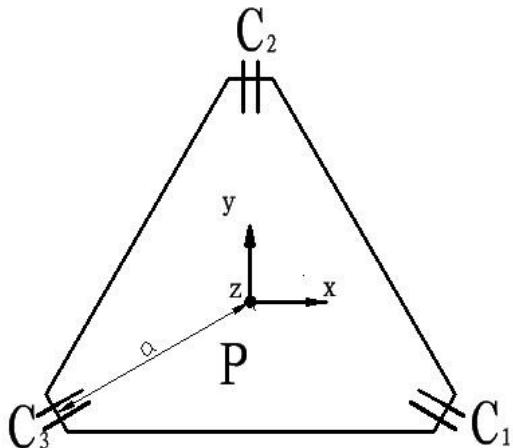


图 3 动平台俯视图

1.2 对轴线 s_4 进行分析

动平台的姿态方程为:

$$R(\delta, \phi, \psi) = R_x(\delta)R_y(\phi)R_z(\psi) = \begin{bmatrix} c\psi c\phi & -s\psi c\phi & s\phi & 0 \\ c\psi s\phi s\delta + s\psi c\delta & -s\psi s\phi s\delta + c\psi c\delta & -c\phi s\delta & 0 \\ -c\psi s\phi c\delta + s\psi s\delta & s\psi s\phi c\delta + c\psi s\delta & c\phi c\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 s 表示 \sin , c 表示 \cos , 下同。

C_i 随动平台先后绕着 O-xyz 坐标系中 Z、Y、X 轴转动的角度分别为 ψ 、 ϕ 、 δ 后的坐标为: $C'_i = R(\delta, \phi, \psi)C_i$ 。可得向量 OC'_i , 且与轴线 s_4 的方向相同。

1.3 对轴线 s_3 进行分析

根据结构特点可知: 轴线 s_3 绕着轴线 s_2 旋转的同时沿着轴线 s_2 的方向移动, 设位移为 t , 且始终垂直于轴线 s_2 。当关节 A_i 输入转角为 α_i , 轴线 s_3 绕着轴线 s_2 旋转的角度即为 α_i 。在初始状态下, 空间中三条支链中间转动副的轴线分别 s_{13}, s_{23}, s_{33} , 他们在空间中两两分别相交于点 P_1, P_2, P_3 , P_1 为轴线 s_{13}, s_{23} 的交点; P_2 为轴线 s_{23}, s_{33} 的交点; P_3 为轴线 s_{33}, s_{13} 的交点。有 $P_1 = (0, -2(b-d), h)^T$, $P_2 = (\sqrt{3}(b-d), b-d, h)^T$, $P_3 = (-\sqrt{3}(b-d), b-d, h)^T$, 其中 h 为动平台在起始位置时, B_i 点在 Z 向距离; d 为初始状态时, B_i 点与 A_i 点在 XY 平面内投影之间的距离。

根据空间一点绕任意轴线旋转的齐次变换矩阵:

$$T = \begin{bmatrix} c + A_x^2(1-c) & A_x A_y(1-c) - A_z s & A_x A_z(1-c) + A_y s & 0 \\ A_x A_y(1-c) + A_z s & c + A_y^2(1-c) & A_y A_z(1-c) - A_x s & 0 \\ A_x A_z(1-c) - A_y s & A_y A_z(1-c) + A_x s & c + A_z^2(1-c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 A_x, A_y, A_z , 分别表示轴线在 X、Y、Z 方向上的单位矢量。

根据空间中两点确定一条直线, 将 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 点两两绕着所对应的轴线 s_{12}, s_{22}, s_{32} 进行旋转可得到轴线 $P'_1P'_2 = s'_{13}, P'_2P'_3 = s'_{23}, P'_3P'_1 = s'_{33}$ 。

1.4 机构反解模型的建立

由 s_4 与 s_3 垂直关系有:

$$OC'_i \mathbf{g}'_{i3} = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (3)$$

经过整理可得:

$$A_i \sin \alpha_i + B_i \cos \alpha_i + C_i = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (4)$$

式中 A_i, B_i, C_i 均为只包含 ψ, ϕ, δ 的多项式。求解可得:

$$\alpha_i = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-A_i \pm \sqrt{A_i^2 + B_i^2 - C_i^2}}{C_i - B_i} \right) \quad (5)$$

由式 (5) 可以看出在对应的动平台的位姿关系上, 有两组输入角度, 但根据图 1 可知, α_i 的取值范围在区间 $[90^\circ \sim 90^\circ]$ 之间, 由此便于得出符合几何关系的正确解。

2 机构的正解分析

运动学正解的过程就是已知机构驱动关节变量求解动平台的位姿参数的过程。对于机构 3-CRC, 即已知与定平台相连的三个圆柱副的转动角度 α_1 、 α_2 、 α_3 , 求解动平台姿态角 ψ 、 ϕ 和 δ 。

令 $t_i = \tan \frac{\nu}{2}$ ($i=1, 2, 3$ 对应 $\nu=\psi, \phi, \delta$), 有

$\sin \nu = \frac{2t_i}{1+t_i^2}$, $\cos \nu = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2}$, 将其代入式 (4) 整理后有

$$L_i t_3^2 + M_i t_3 + N_i = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (6)$$

式中 L_i 、 M_i 、 N_i 为包含机构尺寸 a 、 l (如图 2、图 3) 和 t_1 、 t_2 的表达式。

将式 (6) ($i=1,2,3$) 同时乘以 t_3 得式 (7)

$$L_i t_3^3 + M_i t_3^2 + N_i t_3 = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (7)$$

为利用 Sylvester 析配消元法消去 t_3 , 在式 (6)、(7) 中选 $i=1, 2$ 得四个方程, 构成以 L_i 、 M_i 、 N_i 为系数表达式, t_3 为变量的方程组。由于 t_3 不可能恒为零, 故方程组系数行列式应为 0。即有

$$\begin{vmatrix} L_1 & M_1 & N_1 & 0 \\ 0 & L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 & 0 \\ 0 & L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0$$

直接展开有:

$$(L_1 N_2 - N_1 L_2)^2 + (L_1 M_2 - M_1 L_2)(N_1 M_2 - M_1 N_2) = 0 \quad (8)$$

在式 (6)、(7) 中选 $i=2, 3$ 得另外四个方程, 采用类似方法得到

$$(L_2 N_3 - N_2 L_3)^2 + (L_2 M_3 - M_2 L_3)(N_2 M_3 - M_2 N_3) = 0 \quad (9)$$

式 (8)、(9) 中只含有未知数 t_1 、 t_2 , 为消去 t_2 需进行二次消元。将式 (8)、(9) 整理为式 (10), 其中 P_i 、 Q_i 、 R_i 、 S_i 、 U_i ($i=1, 2$) 为只含有 t_1 的多项式, 且 t_1 最高为四次项。

$$P_i t_2^4 + Q_i t_2^3 + R_i t_2^2 + S_i t_2 + U_i = 0 \quad (i=1, 2) \quad (10)$$

通过对式 (10) 两式分别乘以 t_2 、 t_2^2 、 t_2^3 , 得到共 8 个方程组成的方程组, 同样其系数行列式应为 0。

$$\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R & S_1 & U_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & Q_1 & R_1 & S_1 & U_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1 & Q_1 & R_1 & S_1 & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P & Q_1 & R_1 & S_1 & U_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 & S_2 & U_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & Q_2 & R_2 & S_2 & U_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & Q_2 & R_2 & S_2 & U_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_2 & Q_2 & R_2 & S_2 & U_2 \end{vmatrix} = 0$$

展开后得到关于 t_1 的多项式方程, 其最高次幂为 32, 利用数值方法可求解。依次可求出 ψ 、 ϕ 和 δ 。

3 数值计算

代入数值:

当 $a=60, b=60, z=60\sqrt{3}, h=50, d=20$ 时, 利用反解模型, 假设在动平台只绕着 X 轴转动时, 即 $\phi=\psi=0$, 依次代入数值可得如图 4 所示角度 δ 与输入关节的变量 α_1 、 α_2 、 α_3 之间的关系曲线。

同理可得, 绕 Y 轴、Z 轴转动时所对应各条支链的输入角关系曲线如图 5 和图 6 所示。

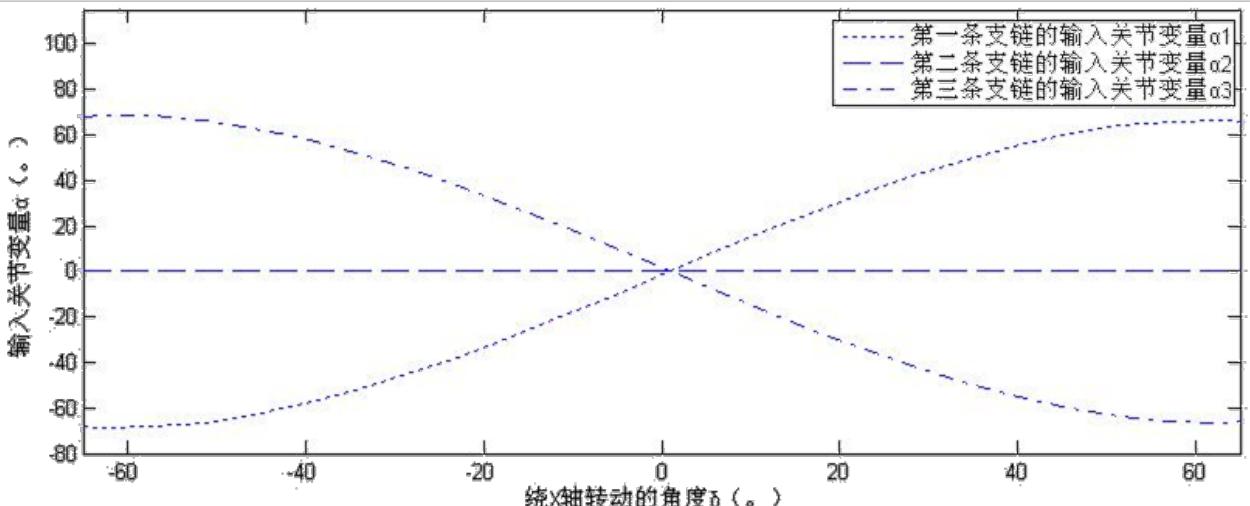
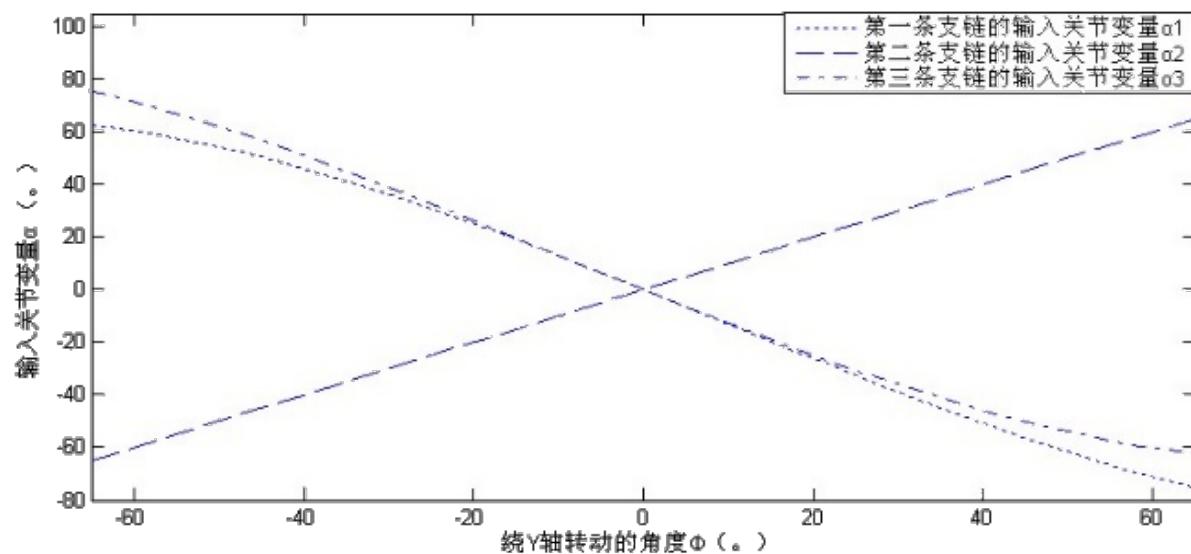
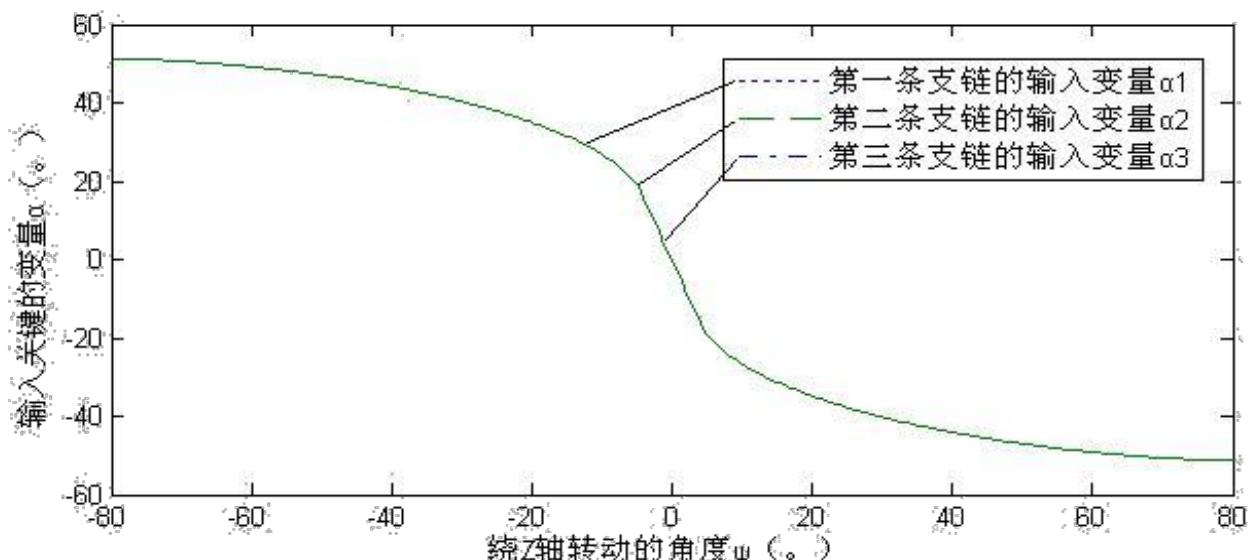


图 4 X 轴转动角度 δ 与输入关节的变量 α_1 、 α_2 、 α_3 之间的关系曲线

图 5 Y 轴转动角度 ϕ 与输入关节的变量 α_1 、 α_2 、 α_3 之间的关系曲线图 6 Z 轴转动角度 ψ 与输入关节的变量 α_1 、 α_2 、 α_3 之间的关系曲线

4 结论

提出一种新型的纯转动并联机构 3-CRC 根据其支链关节位置的特殊性建立了反解方程，并代入数值进行计算。得出动平台分别绕着 X, Y, Z 轴线做纯转动时，输入关节相应的角度变换曲线。对这种机器人进一步的理论研究和运用推广有重要意义。

参考文献

- [1] 黄真.赵永生.赵铁石,高等空间机构学[M].高等教育出版社.2006

- [2] 黄真.孔宪文,6-SPS 并联机器人机构运动分析[M].东北重型机械学院学报.1992,16(4):283-289
- [3] 张曙 Heisel.U,并联运动机床[M].北京:机械工业出版社,2003.
- [4] 刘平安,槐创锋. 利用约束螺旋理论综合的空间对称 2-DOF 并联机构[J],中国机械工程, 2014 ,25(18):2506-2510.
- [5] Zheng Huang,Q. C. Li. General Methodology for Type Synthesis of Lower-Mobility Symmetrical Parallel Manipulators and Several Novel manipulators [J].

- International Journal of Robotics Research, 2002, 21(2): 131-145
- [6] 方菲, 刘平安 直流道消防炮的开发设计与实验[J]. 华东交通大学学报, 2022, 39 (6) :84-89.
- [7] 张立杰, 宗家富, 球面 3 自由度串联机器人工作空间的研究[M]. 机械工程学报, 2000, 36(10):104-107
- [8] 黄真, 孔令富, 方跃法, 并联机器人机构学理论及控制[M]. 机械工程出版社, 1996.
- [9] 戴丽娜, 金振林, 一种基于球面并联机构的肩关节的分析与设计[J]. 燕山大学学报, 2006, 30(1):14-16.

版权声明: ©2025 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

