高中数列最值竞赛题解法例析

王植愉

扬州大学数学学院 江苏扬州

【摘要】数列最值问题是高中数学竞赛的核心考点之一，其解法融合函数单调性、不等式性质、递推逻辑等多模块知识，对学生的综合应用能力要求较高。本文针对竞赛题的命题特点，基于递推关系法、函数法、不等式法、构造法等多种典型解法，结合 2022-2024 年全国联赛、各省预赛及历年经典真题共 8 道例题，详细拆解解题逻辑与步骤，兼顾方法普适性与竞赛题的灵活性，为竞赛备考提供系统性参考。

【关键词】数列最值；高中数学竞赛；解法例析

【收稿日期】2025 年 11 月 14 日 【出刊日期】2025 年 12 月 8 日 【DOI】10.12208/j.aam.20250036

Analysis of solutions to competitive problems on the maximum and minimum of sequences in high school

Zhiyu Wang

School of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】The problem of finding the extreme values of sequences is one of the core topics in high school mathematics competitions. Its solutions integrate knowledge from multiple areas, including the monotonicity of functions, properties of inequalities, and recursive reasoning, demanding a high level of comprehensive application from students. This article, focusing on the characteristics of competition problems, explores various typical methods such as the recursive relation method, function method, inequality method, and construction method. By analyzing eight example problems from the 2022-2024 National League, provincial preliminaries, and classic historical problems, it provides a detailed breakdown of the problem-solving logic and steps. It balances the general applicability of methods with the flexibility required for competition problems, offering a systematic reference for competition preparation.

【Keywords】Extremes of sequences; High school mathematics competitions; Analysis of solution methods

数列最值问题在高中数学竞赛中频繁出现，题型涵盖“求数列的最大/最小项”、“求前 n 项和的最值”、“含参数数列的最值讨论”、“绝对值数列最值”等，其本质是通过分析数列的单调性、有界性、周期性，结合代数变形与逻辑推理求解[1]。竞赛题往往弱化通项公式的直接给出，强化递推关系、约束条件的设计，需要灵活选择解法突破难点[2]。本文结合历年数学竞赛真题（含全国联赛、各省预赛经典题型），对核心题型以及解法进行分类例析，所有例题均源自竞赛实战真题，确保方法的实用性与针对性[3]。

1 求数列的最大/最小项

1.1 递推关系法

例 1：（2022·重庆预赛）已知 $a_1=1, a_{n+1}=\lambda a_n^2+2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，若数列 $\{a_n\}$ 有上界，即存在常数 M，使得 $a_n\le M$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，则实数 λ 的最大值为_____。

解析：由题意得考虑 $\lambda>0$ 即可。

因为 $a_{n+1}-a_n=\lambda\left(a_n-\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2+2-\dfrac{1}{4\lambda}$，

则 $a_{n+1}-a_n$ 大小取决于 λ 的范围。

①当$\lambda > \frac{1}{8}$时，$a_{n+1} - a_n > 0$，

数列$\{a_n\}$单调递增，无上界；

②当$0 < \lambda \le \frac{1}{8}$时，$a_{n+1} - a_n \le 0$，

下证$n \in \mathrm{N}^*$时，$0 < a_n \le 4$。

当$n = 1$时，$a_1 = 1$，结论成立；

②假设$n = k$时结论成立，即$0 < a_k \le 4$。

则当$n = k + 1$时，$0 < a_{k+1} = \lambda a_n^2 + 2 \le \frac{1}{8} \cdot 4^2 + 2 = 4$，

所以$n = k + 1$时结论也成立。

由归纳法原理，对任意$n \in \mathrm{N}^*$时，$0 < a_n \le 4$。

所以实数λ的最大值为$\frac{1}{8}$。

1.2 函数法

例 2：（2024·吉林预赛）记$S=\frac{3^2+4}{3^2-4}+\frac{4^2+4}{4^2-4}+\frac{5^2+4}{5^2-4}+\cdots+\frac{13^2+4}{13^2-4}$，则与$S$最接近的整数为（　）。

A.14　　B.15　　C.16　　D.17

解析：因为当$m \ge 3$时，

$\frac{m^2+4}{m^2-4} = 1 + \frac{8}{m^2-4} = 1 + 2\left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m+2}\right)$，

所以$S = \sum_{m=3}^{13} \frac{m^2+4}{m^2-4}$

$= 11 + 2\sum_{m=3}^{13}\left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m+2}\right)$

$= 11 + 2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15}\right)$

$= 15 - 2\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}\right)$

$> 15 - 2 \times \frac{3}{13} > 14.5$

故选：B。

评注：关于求解数列的最大项或者最小问题，首先需识别题干给出的递推式或通项形式，初步判断数列的单调性与有界性基础，如递推式含二次项需关注单调性转折条件，通项为分式需观察分母是否可因式分解[4]；然后根据类型选择适配解法，递推式明确且无通项时用递推关系法，通项明确时用函数法，震荡数列需先证明差值绝对值递减以确认极限存在；最后结合首项、极限值或离散点取值确定最值，规避将连续函数极值直接等同于离散数列最值、忽略有界性验证的误区。

2 求前 n 项和的最值

2.1 单调性分析

例 3：（2023·重庆预赛）已知λ为正实数，数列$\{a_n\}$满足：$a_1 = \frac{1}{3}$，$a_{n+1} = \frac{2a_n^2}{4a_n^2-2a_n+1}$，$n = 1, 2, 3, \cdots$．若对任意的$m \in \mathrm{N}^*$，都有$\sum_{k=1}^{m} a_k < \lambda$，求$\lambda$的最小值。

解析：由$a_{n+1} = \frac{2a_n^2}{4a_n^2-2a_n+1}$可得

$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 - \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2a_n^2}$，

设$b_1 = 3$，$b_n = \frac{1}{a_n}$，

则当$b_n > 2$时，

$b_{n+1}-2=\frac{b_n^2}{2}-b_n=\frac{b_n(b_n-2)}{2}>0$，
所以$b_{n+1}>2$，
由数学归纳法原理知，$b_n>2$对任意$n\in\mathrm{N}^*$均成立。
又因为$b_{n+1}-b_n=\frac{b_n^2}{2}-2b_n+2=\frac{1}{2}(b_n-2)^2>0$，
所以数列$\{b_n\}$单调递增，
则有$b_{n+1}-2=\frac{b_n(b_n-2)}{2}\geq\frac{3}{2}(b_n-2)$
所以$b_n-2\geq(b_1-2)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，
所以$b_n\geq 2+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，
从而当$n\to+\infty$时，$b_n\to+\infty$.
又因为$\frac{1}{b_{n+1}-2}=\frac{2}{b_n(b_n-2)}=\frac{1}{b_n-2}-\frac{1}{b_n}$
所以$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_n-2}-\frac{1}{b_{n+1}-2}$
所以$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{b_k}=\frac{1}{b_1-2}-\frac{1}{b_{m+1}-2}=1-\frac{1}{b_{m+1}-2}$.
所以$1-\left(\frac{2}{3}\right)^m\leq\sum_{k=1}^{m}a_k=1-\frac{1}{b_{m+1}-2}<1$，
因此$m\to+\infty$时，$\sum_{k=1}^{m}a_k$的上确界为 1。
综上，λ的最小值为 1。

2.2 通项正负分界点法

例 4：（2024·福建预赛）已知S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，且$S_n=\frac{9}{8}a_n-\frac{3}{8}\times 3^n+\frac{3}{8}$，则$\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i}{a_i}<2024$成立的最大正整数$n$的值为_____。

解析：当$n\geq 2$时，

由$\begin{cases}8S_n=9a_n-3^{n+1}+3，\\ 8S_{n-1}=9a_{n-1}-3^n+3\end{cases}$可得

$8a_n=9a_n-3^{n+1}-9a_{n-1}+3^n$，
所以$a_n=9a_{n-1}+2\cdot 3^n$
所以$\frac{a_n}{3^n}=3\cdot\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}+2$
即$\frac{a_n}{3^n}+1=3\left(\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}+1\right)$.
又当$n=1$时，
可得$\frac{1}{8}a_1=\frac{9}{8}-\frac{3}{8}$,
所以$a_1=6$，
所以$\frac{a_1}{3}+1=3$，
则$a_n=3^n(3^n-1)(n\in\mathrm{N}^*)$.
于是由$a_n=9^n-3^n$可得
$S_n=\frac{9}{8}(9^n-1)-\frac{3}{2}(3^n-1)$，
$=\frac{9}{8}(9^n-3^n)-\frac{3}{8}(3^n-1)$，
所以$\frac{S_n}{a_n}=\frac{9}{8}-\frac{1}{8\cdot 3^{n-1}}$
从而有
$\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i}{a_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{9}{8}-\frac{1}{8\cdot 3^{i-1}}\right)=\frac{9}{8}n-\frac{1}{8}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}$

$=\frac{9}{8}n-\frac{3}{16}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{9}{8}n-\frac{3}{16}+\frac{1}{16\cdot 3^{n-1}}$

$=\frac{3}{16}(6n-1)+\frac{1}{16\cdot 3^{n-1}}$.

所以$\frac{3}{16}(6n-1)+\frac{1}{16\cdot 3^{n-1}}<2024$

即$n\le 1799$。

评注：关于求解前 n 项和的最值问题，首先需分析数列通项的符号变化规律或递推式是否可裂项，确定前 n 项和的单调性[5]；然后针对可裂项的递推式，通过构造倒数数列或差数列实现裂项求和，得到和的简化表达式，针对正负项通项则找到“正负分界点”；最后通过和的表达式范围或分界点处和的大小确定最值，同时验证裂项抵消的范围是否正确、分界点附近项的和是否为极值，避免漏项或误判单调性[6]。

3 含参数列的最值

3.1 参数分类法

例 5：（2024·广东预赛）数列$\{a_n\}$满足：对任意$n\ge 2$，$a_n=2024a_{n-1}-n$．如果该数列的每一项都是正数，则a_1的最小值为_____。

解析：设a_n+kn+b

$=2024[a_{n-1}+k(n-1)+b]$

$=2024a_{n-1}+2024kn-2024k+2024b$

所以$a_n=2024a_{n-1}+2023kn-2024k+2023b$，

则$k=-\frac{1}{2023}$，$b=-\frac{2024}{2023^2}$.

于是$a_n-\frac{1}{2023}n-\frac{2024}{2023^2}=\left(a_1-\frac{4047}{2023^2}\right)\times 2024^{n-1}$

$a_n=\left(a_1-\frac{4047}{2023^2}\right)\cdot 2024^{n-1}+\frac{1}{2023}n+\frac{2024}{2023^2}$，

所以a_1的最小值为$\frac{4047}{2023^2}=\frac{4047}{4092529}$。

3.2 不动点法

例 6：（2024·江苏预赛）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，其前n项和为S_n，若对任意的正整数m，n，当$m>n$时，恒有$a_{m+n}+a_{m-n}=2a_m+2a_n$，则$S_{10}$的值为_____。

解析：取$m=2$，$n=1$

则有$a_3+a_1=2a_2+2a_1$，

所以$a_3=2a_2+a_1=2a_2+1$；

取$m=3$，$n=1$

则有$a_4+a_2=2a_3+2a_1$

所以$a_4=2a_3-a_2+2$；

取$m=3$，$n=2$

则有$a_5+a_1=2a_3+2a_2$

所以$a_5=2a_3+2a_2-1$；

取$m=4$，$n=1$

则有$a_5+a_3=2a_4+2a_1$

所以$a_5=2a_4-a_3+2$，

则$\begin{cases}a_3=2a_2+1,\\ a_4=2a_3-a_2+2,\\ 2a_4-a_3+2=2a_3+2a_2-1\end{cases}$

所以$\begin{cases}a_3=2a_2+1,\\ 2a_4=4a_3-2a_2+4,\\ 2a_4=3a_3+2a_2-3\end{cases}$

即$a_2=4$.
又取$n=1$
则有$a_{m+1}+a_{m-1}=2a_m+2$
所以$a_{m+1}-a_m=a_m-a_{m-1}+2$，
于是$a_{m+1}-a_m=a_2-a_1+2(m-1)=2m+1$
所以$a_n=a_1+\sum_{m=1}^{n-1}(a_{m+1}-a_m)$
$=1+\sum_{m=1}^{n-1}(2m+1)=n^2(n\in\mathrm{N}^*)$.
所以$S_{10}=1^2+2^2+\cdots+10^2=\frac{10\times11\times21}{6}=385$。

评注：解决含参数列最值问题，首先需明确参数的位置，分析参数对数列单调性、有界性或正项性的影响，确定参数的关键临界值[7]；然后按临界值将参数划分为不同范围，线性递推含参数时优先构造等比数列分离参数与确定项，运用递推含参数时用作差法和数学归纳法验证每类范围下数列的性质；最后结合每类范围的分析结果，确定参数的最值，同时验证有限项与无穷项是否均满足题干条件，避免参数分类不全或忽略有限项验证的误区。

4 含约束条件的数列最值

4.1 不等式放缩法

例 7：（2022·全国联赛 A 卷）给定正整数$m(m\geq3)$.设正项等差数列$\{a_n\}$与正项等比数列$\{b_n\}$满足：$\{a_n\}$的首项等于$\{b_n\}$的公比，$\{b_n\}$的首项等于$\{a_n\}$的公差，且$a_m=b_m$．求a_m的最小值，并确定当a_m取到最小值时a_1与b_1的比值。

解析：根据条件，可设$\{a_n\}$的首项为a，公差为b，$\{b_n\}$的首项为b，公比为a，其中a，$b>0$，
则$a_m=a+(m-1)b$，$b_m=b\cdot a^{m-1}$.
记$\lambda=a_m=b_m$，则由上式知
$\lambda=b\cdot a^{m-1}=b\cdot(\lambda-(m-1)b)^{m-1}$,
利用m元平均值不等式，得
$(m-1)^2\lambda$
$=(m-1)^2b\cdot(\lambda-(m-1)b)^{m-1}$
$\leq\left(\frac{(m-1)^2b+(m-1)(\lambda-(m-1)b)}{m}\right)^m$
$=\left(\frac{(m-1)\lambda}{m}\right)^m$,
即有$\lambda\geq\left(\frac{m^m}{(m-1)^{m-2}}\right)^{\frac{1}{m-1}}$.
当$(m-1)^2b=\lambda-(m-1)b$，
即$b=\frac{\lambda}{m(m-1)}$时，等号成立，
此时λ取到最小值$\left(\frac{m^m}{(m-1)^{m-2}}\right)^{\frac{1}{m-1}}$,
相应有
$a=\lambda-(m-1)b=(m-1)^2b$,
故$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}=(m-1)^2$.

4.2 构造法

例 8：（2023·新疆预赛）对于数列$\{a_n\}$，记$b_n=a_{n+1}-a_n$，则数列$\{b_n\}$为数列$\{a_n\}$的一阶差数列，记$c_n=b_{n+1}-b_n$，则数列$\{c_n\}$为数列$\{a_n\}$的二阶差数列．以此类推，可得到数列$\{a_n\}$的p阶差数列．若$\{a_n\}$的p阶差数列是非零常数列，则称数列$\{a_n\}$为p阶等差数列．已知数列$\{a_n\}$是二阶等差数列，$a_{10}=23$，$a_{20}=23$，且二阶差数列$\{c_n\}$中，$c_n=20$，则$a_{30}=$______。

解析：由题意可设

$a_n = xn^2 + yn + z$，

所以$b_n = a_{n+1} - a_n$

$= x[(n+1)^2 - n^2] + y[(n+1) - n]$

$= x(2n+1) + y = 2xn + x + y$，

$c_n = b_{n+1} - b_n = 2x = 20$

所以$x = 10$。

联立

$\begin{cases} a_{10} = 10 \times 100 + 10y + z = 23 \\ a_{20} = 10 \times 400 + 20y + z = 23 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} y = -300 \\ z = 2023 \end{cases}$.

所以$a_n = 10n^2 - 300n + 2023$

所以$a_{30} = 2023$.

评注：解决含参数列最值问题时，首先需将题干的额外约束条件转化为可分析的数列结构[8]；然后根据转化后的结构选择解法，双数列约束用均值不等式放缩，高阶等差用多项式通项求参数，递推不等式用参考数列放缩；最后验证等号成立条件或约束满足情况，确定最值，避免约束转化不彻底、放缩过度的误区，确保每一步推导均符合约束要求[9]。

5 结语

数列最值问题作为高中数学竞赛的核心模块，其解题逻辑始终围绕“数列性质分析”与“解法精准匹配”展开。本文基于 2022-2024 年全国高中数学联赛及多省预赛真题，将此类问题划分为“求数列的最大/最小项”、“求前 n 项和的最值”、“含参数数列的最值”和“含约束条件的数列最值”四大典型题型，通过 8 道真题的分步解析，提炼出递推关系法、函数法、不等式放缩法、构造法等核心解法，明确了“递推式结构决定变形方向、数列性质决定分析维度、题干约束决定解法优先级”的解题规律。

从实践价值来看，本文的题型分类与解法适配逻辑，既覆盖了竞赛高频考点，也针对学生常见误区提供了规避思路。备考过程中，若能以真题为载体，强化题型特征识别和解法快速匹配的训练，不仅可提升数列最值问题的解题效率，更能夯实函数、不等式、递推逻辑等综合知识的应用能力，为应对竞赛中更复杂的综合性问题奠定基础[10]。

参考文献

[1] 王慧兴.高中数学竞赛中的数列问题研究 [M]. 北京：北京师范大学出版社,2020:45-78.

[2] 李胜宏,边红平.数学竞赛培优教程（专题讲座）[M]. 杭州：浙江大学出版社,2021:89-126.

[3] 陈传理,张同君.竞赛数学教程（第 3 版）[M]. 北京：高等教育出版社,2019:102-145.

[4] 蔡小雄.更高更妙的高中数学思想与方法（竞赛版）[M]. 杭州：浙江大学出版社,2022:156-198.

[5] 熊斌,苏勇.数列与数学归纳法 [M]. 上海：华东师范大学出版社,2020:23-67.

[6] 单墫,熊斌.奥数教程（高中第三分册）[M]. 上海：华东师范大学出版社,2021:79-118.

[7] 冯志刚.数学竞赛中的初等数论（第 2 版）[M]. 上海：华东师范大学出版社,2019:92-135.

[8] 李建泉.全国高中数学联赛试题详解（2020-2024）[M]. 天津：南开大学出版社,2025:58-96.

[9] 张宇.高中数学竞赛专题突破：数列与不等式 [M]. 西安：陕西师范大学出版社,2022:34-82.

[10] 杨德胜.竞赛数学中的函数与数列问题 [M]. 广州：华南理工大学出版社,2021:69-108.