核心素养视角下中考数学试题解法探究

—关于一道中考压轴题的思考

王奕迅

扬州大学数学科学学院 江苏扬州

【摘要】中考数学试题直接影响着初中的数学教学，本文对一道 2024 年徐州市中考数学压轴题，采用一题多解的形式探讨几何中动态定值问题的解题策略，帮助学生在复杂的动态几何问题中抓住关键要素，建立几何模型，通过转化与推理解决问题，掌握求解几何定值问题的基本方法，以期培养学生一题多解的思维方式，提高分析问题，解决问题的能力；文章还从核心素养以及教学的视角进行解题总结与反思：教师要关注解题教学，把握问题本质，擅用一题多解，培养学生数学思维，帮助培养学生核心素养。

【关键词】数学核心素养；一题多解；中位线；转化

【收稿日期】2025 年 2 月 18 日 **【出刊日期】**2025 年 3 月 18 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20250005

Exploration of solutions to middle school mathematics examination questions from the perspective of core competencies- Thoughts on a final question in the Middle School Entrance Examination

Yixun Wang

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】The mathematics test questions of the high school entrance examination directly influence the mathematics teaching in junior high school. This paper explores the problem-solving strategies for dynamic constant value problems in geometry by using multiple solutions to a 2024 mathematics high school entrance examination question in Xuzhou City. It aims to help students grasp the key elements in complex dynamic geometry problems, establish geometric models, solve problems through transformation and reasoning, and master the basic methods for solving geometric constant value problems. The goal is to cultivate students' ability to solve problems in multiple ways, enhance their problem analysis and solving skills. The article also summarizes and reflects on the problem-solving process from the perspectives of core literacy and teaching: teachers should focus on problem-solving teaching, grasp the essence of the problem, skillfully apply multiple solutions, cultivate students' mathematical thinking, and help students develop core literacy.

【Keywords】Core literacy of mathematics; Multiple solutions to one problem; Midline; Transformation

1 试题呈现

（2024 年徐州市中考数学第 28 题）如图 1，在平行四边形 ABCD 中，AB=6，BC=10，∠BAD=60°，P 为 AB 上一点，连接 CP，将 CP 绕点 C 顺时针旋转 60°至点 E，过点 E 作 EF∥AB 交 AD 所在的直线于点 F；取 DE 中点 N，PF 中点 M，连接 MN，MN 与 AD 交于点 Q。

（1）当点 P 在点 B 时，求 MN 的长为（ ）。

（2）MN 与 AQ 的长度是否为定值？若是，写出定值；若不是，请说明理由。

2 研究方法

本研究采用内容分析法，对 2024 年徐州市中考数学压轴题的六种解法进行深入分析。首先，通过文献

回顾，梳理相关几何模型和解题策略的理论基础；其次，运用几何画板软件进行图形构造和验证，确保解法的准确性和可行性；最后，结合教学实践，探讨不同解法对学生数学思维和核心素养培养的影响，进一步强化对几何模型所蕴含性质的理解和推理[1]。

3 试题解析

首先，本题第（1）问，如图 2，当 P 与 B 点重合时，易证△PCE 为等边三角形，因为 MN 为△DEB 的中位线，从而 $MN=\dfrac{1}{2}PE=\dfrac{1}{2}BC=5$。从核心素养的考查视角来看，第（1）问求当 P 点在特殊位置时 MN 的长度，学生只需要作出 P 点在 B 点时的图像，并抓住 MN 这条中位线运用中位线定理求解问题即可。这里主要涉及了几何直观、推理能力这两个核心素养，并且只要求学生会利用简单知识、基本规则和基本方法解决这个问题，因此考查水平较为简单。

本题第（2）问是一道动态几何中的求定值问题，主要考查了学生中位线定理、等边三角形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质等核心知识[2]；解决本题的难点在于如何将 MN 的长度转化为其他已知线段的长度求解，这就需要抓住 M、N 这两点分别是 PF、DE 这两条线段的中点这一关键条件，依据中点来构造相关几何模型，利用几何关系来进行求解[3]；而 AQ 的大小都是通过构造图形得到 MN 的位置后进行求解，解法基本相同，这里我们不作研究。接下来笔者给出六种 MN 的求解方法，并从核心素养的考查视角对这些解法给出评价与反思。

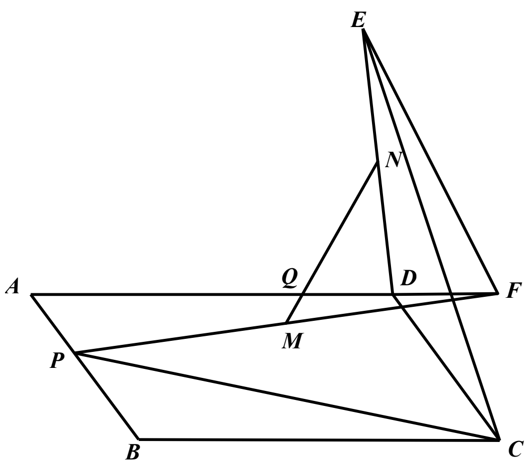

图 1 徐州市中考第 28 题图

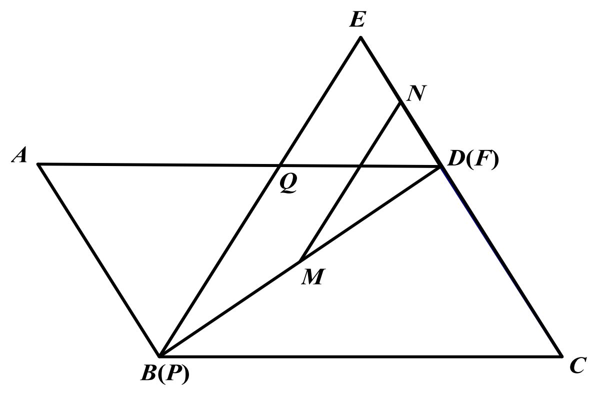

图 2 第（1）问图

4 条件分析

由于题目的图像与条件较为复杂，我们通过条件分析来求证一些我们后面普遍需要用到的一些结论。

证明：如图 3，当 P 在 B 点时，E 在 E′ 处，连接 BE', EE'，

易得 $\triangle$BCE′ 为等边三角形 （结论 1）

又∵ $\angle CE'E=\angle CBP=120°$，$\angle BE'C=60°$，

∴ B, E', E 三点共线 （结论 2）

∵ $EF \parallel DC$，作 $ER\perp DC$，$FS\perp DC$ 于 R, S 两点，

$\angle ERE'=\angle FSD=90°, \angle RE'E=\angle FDS=60°, ER=FS,$

∴ $\triangle ERE'\cong\triangle FSD$，∴ $FD=EE'$，

又∵ $\triangle$EE′C $\cong\triangle$PBC，∴ $FD=PB$ （结论 3）

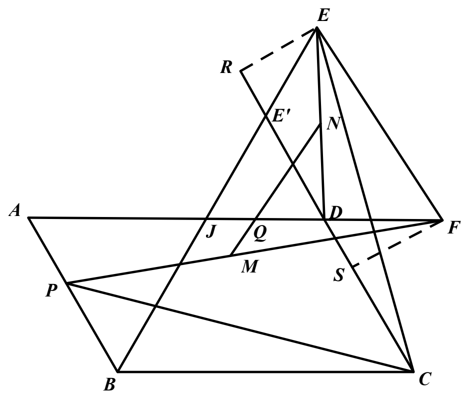

图 3

5 思路与解法赏析

思路 1　构造平行四边形，将 MN 转化为三角形中的中位线求解

解法 1：如图 4，当 P 在 B 时，点 E 在 E′ 处，连接 $BE', E'E$，

过 E 作 $EH \parallel FA,$ 分别交 CE'、BA 的延长线于点 G、H，

$\because EF \parallel BA \parallel DG, EG \parallel FD,$

$\therefore$ 四边形 $EGDF$ 为平行四边形；$\therefore$ 点 N 也为 GF 中点，

$\therefore MN \parallel GP$，且 $MN = \dfrac{1}{2}GP$；

由结论 1 $\because \triangle BCE'$ 为等边三角形，$\therefore \triangle GE'E$ 也为等边三角形，

又由结论 3 的 BP=E′E，$\therefore$ GE′=E′E=BP，

又 GE′ || PB，$\therefore$ 四边形 GPBE′ 为平行四边形，

$\therefore GP = BE' = BC = 10$，$\therefore MN = \dfrac{1}{2}GP = 5$。

解法 2：如图 5，延长 BC 至 H，使得 $CH = PB$，连接 FH，

过 P 作 $PK \parallel BH$，交 BE 于 G，FH 于 K，连接 KC，

易证四边形 $DFHC$、四边形 $PKHB$ 为平行四边形，

$\therefore KH = PB = CH$，$\therefore$ △CHK 为等边三角形；

$\because CH = CK, PC = CE, \because \angle HCK = \angle PCE = 60°$，

$\therefore \angle HCK + \angle KCE = \angle PCE + \angle KCE, \therefore \angle PCK = \angle ECH$，

$\therefore$ △ECH ≅ $\triangle PCK$，$EH = PK = BH, \angle H = 60°$，$\therefore$ △BEH 为等边三角形，

$\therefore$ KC || BG，$\therefore$ 四边形 BGKC 为平行四边形，$\therefore BG = KC$，$\angle GBC = 60°$，

$\therefore$ PB=BG, $\angle PBG = 60°, \therefore \triangle PBG$ 为等边三角形；

连接 DM，GM，易证△DFM ≅ △MPG（SAS），$\therefore$ MG=MD；

又 $\because \angle GMP = \angle DMF, \therefore G$、$M$、$D$ 三点共线；

又 $\because$ GK || BH，$\therefore$ △EKG 为等边三角形，

$\therefore$ MN=$\dfrac{1}{2}EG = \dfrac{1}{2}GK = \dfrac{1}{2}BC = 5$。

点评：解法 1 与解法 2 解法都是通过构造平行四边形，将 MN 作为三角形的中位线来求解；特别地解法 1 需要通过两个平行四边形的对边转换才能得出底边的长，而解法 2 只需要一个平行四边形的对边转换就可得出，转换关系更加直观简单。

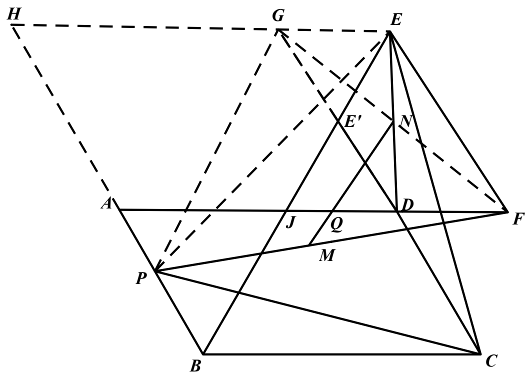

图 4

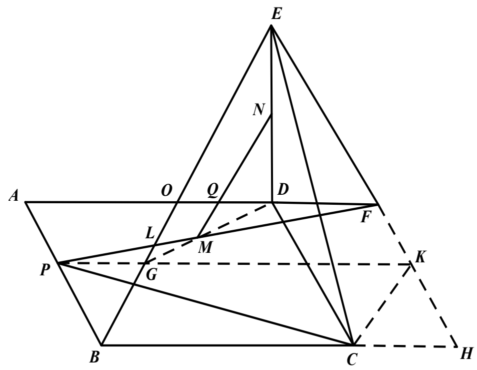

图 5

思路 2　构造等边三角形，通过边长关系转化求解

解法 3：如图 6，过 E 作 AF 平行线与 BA 延长线交于点 G，易得 $GE=AF$

$\because N$ 为 ED 中点且 $HE \parallel DF$，易证 $\triangle HEN \cong \triangle \mathrm{NDF}$，设 $DF = HE = x$，

$\therefore AF = 10 + x, GE = 10 + x, GH = 10$；

当 P 在 B 时，点 E 在点 E'，由结论 1 得 $\triangle \mathrm{BCE'}$ 为等边三角形，

$\therefore \angle E'BC$=60°，$\therefore \angle \mathrm{GBE}$=60°，

又 $\because \mathrm{GE} \parallel \mathrm{BC}$, $\therefore \angle BGE = 60°, \therefore \triangle \mathrm{GBE}$ 为等边三角形，

又 $\because DF = PB = x$，$\therefore GB - PB = GE - HE = 10$，

$\therefore GP = GH$, 又 $\because \angle G = 60° \therefore \triangle GPH$ 为等边三角形，

$\therefore PH = 10$，在 $\triangle FHP$ 中，$MN = \dfrac{1}{2} PH = 5$。

解法 4：如图 7，取 BF，EF 中点 H、G，连接 GH，连接 GN、HM，延长并交于点 I

当点 P 在 B 时，E 在 E'处，设 $PB = x$，$\therefore BE = 10 + x$，$\therefore HG = \dfrac{1}{2} BE = 5 + \dfrac{1}{2} x$；

由结论 3，$FD = PB, \therefore MH = NG = \dfrac{1}{2} PB = \dfrac{1}{2} DF = \dfrac{1}{2} x$；

$\because IG \parallel DF \parallel BC, IH \parallel AB \parallel E'C, HG \parallel BE'$，

又 $\because \triangle BCE'$ 为等边三角形，$\therefore \triangle IGH$ 为等边三角形，

$\therefore IH = HG = 5 + \dfrac{1}{2} x$，又 $\because MH = NG$，$\therefore \triangle \mathrm{IMN}$ 也为等边三角形，

$\therefore \mathrm{MN=IM=IH-MH=5+}\dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{2} x = 5$。

点评：解法 3 与解法 4 都是通过构造等边三角形，利用等边三角形的相关性质来求解；解法 3 主要通过等边三角形之间的边长关系转化得到大三角形底边 PH 的长度，从而利用三角形中位线定理来求解 MN，而解法 4 则是构造一个新的等边三角形，通过等价关系将 MN 转化为此等边三角形边长线段之差来求解。

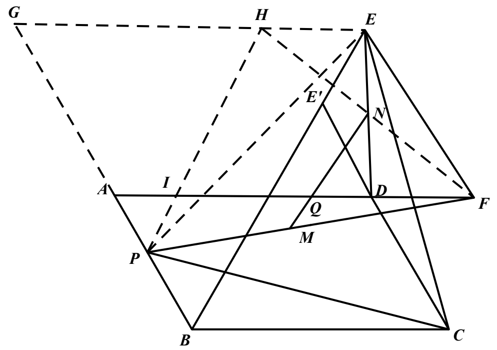

图 6

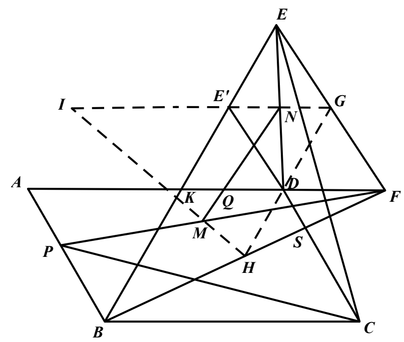

图 7

思路 3 构造相似三角形，通过已知线段的比例关系来求解

解法 5：如图 8，取 EF 中点 G，连接 NG、MG、PE、BE，

由结论 3：DF=PB=x，$\therefore \dfrac{NG}{DF}=\dfrac{NG}{PB}=\dfrac{1}{2}$；

又$\because \triangle PCE$ 为等边三角形，$\therefore \dfrac{GM}{PE}=\dfrac{GM}{PC}=\dfrac{1}{2}, \therefore \dfrac{NG}{PB}=\dfrac{GM}{PC}=\dfrac{1}{2}$；

$\because \angle NGI=\angle GIF(NG \parallel IF)$，$\angle EWF=\angle GIF(GM \parallel EW)$，

$\therefore \angle NGI=\angle EWF$，

又$\because \angle \mathrm{EWF}=\angle AWP, \angle AWP+\angle APW=120°, \angle BPC+\angle APW=120°$，

$\therefore \angle BPC=\angle AWP=\angle EWF=\angle NGI$，

$\because \dfrac{NG}{PB}=\dfrac{GM}{PC}$，$\therefore \triangle NGM \sim \triangle PBC$ PC，

$\therefore MN=\dfrac{1}{2}BC=5$；

点评：解法 5 巧妙的规避了前面解法中需要构造复杂的几何模型来求解 MN 长度的方法，利用两个三角形相似对应边成比例，巧解 MN 的长。

思路 4 构建直角坐标系，运用解析法求解

解法 6：如图 9，以 A 为原点，AF 为 x 轴，过 A 且垂直于 AF 的直线为 y 轴建立平面直角坐标系。

当点 P 在 B 时，E 在 E'处；不妨设 $BP=x$，$\therefore EE'=x$，$\therefore BE=10+x$；

$\angle BAH=\angle ABH=60°, \therefore \triangle ABH$ 为等边三角形，$\therefore AH=AB=6$；

$\because EF \parallel AB$ $\therefore$ △EFH 也为等边三角形，$\therefore$ HE=HF=(10+x)-6=4+x；

$\because AH=6$，$\therefore HD=4$，$\therefore$ DF=(4+x)-4=x，

$\therefore$ F(10+x, 0), E$(8+\dfrac{x}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}(4+x))$, D(10, 0),

P$(\dfrac{1}{2}(6-x), -\dfrac{\sqrt{3}}{2}(6-x))$, N$(9+\dfrac{x}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}(4+x))$, M$(\dfrac{13}{2}+\dfrac{1}{4}x, -\dfrac{\sqrt{3}}{4}(6-x))$；

$$\mathrm{MN}=\sqrt{(\frac{13}{2}+\frac{1}{4}x-9-\frac{x}{4})^2+\left[-\frac{\sqrt{3}}{4}(6-x)-\frac{\sqrt{3}}{4}(4+x)\right]^2}=5；$$

点评：在解法 6 中，由等边三角形与含有 60°这一特殊角度的平行四边形，我们容易联想到建立平面直角坐标系来解决问题；这种解法本质上是将几何问题转化为代数问题，在利用未知数 x 表示出 M、N 两点坐标后直接利用两点间距离公式求解。

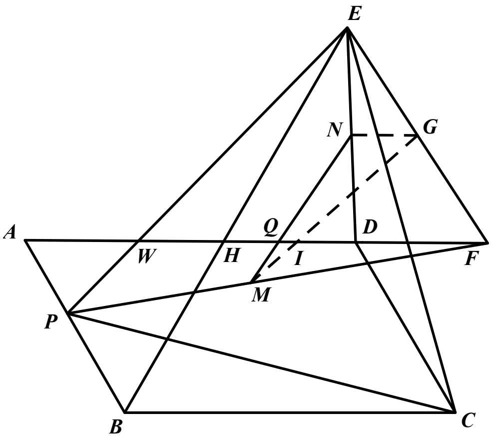

图 8

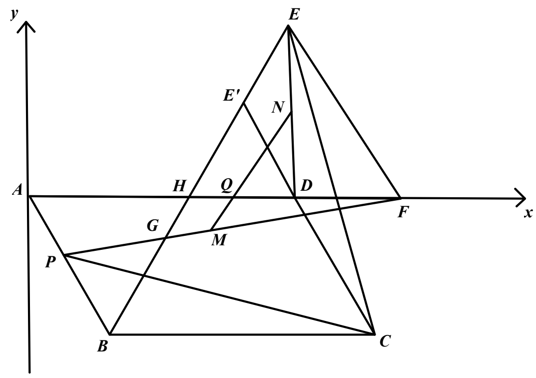

图 9

6 解题反思

6.1 核心素养视角下解法涉及的核心素养水平分析

本题作为压轴题，集中体现了运算能力、几何直观、推理能力等诸多核心素养要求。首先，运算能力.解法 1、2、3 都运用了中位线定理，对运算能力的要求不高；而解法 6 中需要学生进行点坐标的计算以及两点间距离公式的求解，这里就涉及到了更高水平的运算能力要求。

第二，几何直观.几何直观主要是指运用图表描述和分析问题的意识与习惯[4]。本题是一个以平行四边形，等边三角形为基础的几何综合题。在前四种解法中我们均通过构造的方法利用平行四边形、等边三角形等基本图形，分析图形的性质，得到边与边之间的转化关系来求解 MN，建立形与数之间的联系。解法 5 中也是借助构造的两个相似三角形来解 MN，而证明两个三角形相似的过程也是几何直观意识的体现。

第三，推理能力.逻辑推理素养是中学数学的关键素养之一，对中学生数学核心素养的落地生根起着非常重要的作用[5]。推理能力也是本题考查的一个着重点；解法 1 与解法 2 中证明平行四边形、解法 3 与解法 4 中证明等边三角形、解法 5 中证明三角形相似这些都属于对逻辑推理的考查；同时，解法 3、4、6 也注重学生对边与边之间数量关系的转换，属于对代数推理的考查。

6.2 教学启迪

6.2.1 注重基本图形，把握解题本质

初中数学教材涉及三角形，平行四边形，全等三角形，相似三角形等基本图形，这些基本图形中所含的性质或判定包含丰富的几何模型，是我们解决几何问题的基本依据[6]。因此在初中数学教学中，教师要带领学生深度理解基本图形的性质，在解题过程时可以迅速抓住题目中的几何模型，透过现象看本质，快速形成解题思路。

6.2.2 巧设辅助线，体会转化思想

辅助线是转化几何问题的基本工具，在几何问题中，往往已知量与待求量之间并没有很强的关联性，我们需要利用转化思想建立起条件与结论之间的桥梁，而辅助线就是最基本的转化工具，通过构造辅助线，将隐蔽的条件关系外显化，从而实现问题的解决；例如，在教授等边三角形相关性质时，可以设计类似的问题，让学生通过构造等边三角形来解决问题。教师可以引导学生从不同角度思考，如通过边长关系、角度关系等，培养学生的发散思维和创新能力。

6.2.3 擅用一题多解，培养数学思维

波利亚在《怎样解题》中提出数学教育的根本目标是教会学生思考，而解题正是培养学生数学思维能力和自主思考能力的重要手段和途径[7]。但是在我们传统的课堂教学中，教师大多通过题海战术让学生进行练习，每个题能讲到的方法也比较单一，忽视了学生一题多解与发散思维能力的培养。因此在教学中，教师要鼓励学生一题多解，拓宽解题思路，在问题的解决过程中培养见微知著、举一反三的能力，在不同思路的碰撞中培养数学思维[8]。

6.2.4 关注解题教学，发展核心素养

基于考题涉及的核心素养水平分析，我们发现一道题目解法不同，其中所涉及的核心素养的种类与水平高低也会有所不同。因此教师应当关注解题教学，发掘不同解法中所涉及的核心素养，让解题教学成为学生核心素养发展的有效途径。

参考文献

[1] 潘正刚. 建构模型,促进高阶数学思维的发展[J]. 中学数学教学参考, 2020, (29): 75-78.
[2] 周琛. 几何中动态最值问题的求解策略——一道中考压轴题的思路及解法赏析[J]. 初中数学教与学, 2023, (13): 26-28+43.
[3] 李昕雨. 2023 年常州市中考数学第 18 题解法探究[J]. 数理化解题研究, 2024, (14): 15-17.
[4] 孙霞. 数学几何直观的内涵、价值与培养策略[J]. 教师教育论坛, 2024, 37(06): 53-55.
[5] 唐保祥. 问题引导初中生逻辑推理素养提升[J]. 数学通报, 2023, 62(04): 34-39.
[6] 张宁. 追根溯源探本质一题多解提能力——一道中考题的探源、解法及变式[J]. 初中数学教与学, 2024, (19): 16-19.
[7] 邓丽雯. 以“波利亚怎样解题”探索数学思维的形成[J]. 科学大众(科学教育), 2019, (06): 27.
[8] 陈莉. 新课标背景下初中数学解题教学策略[J]. 亚太教育, 2023, (17): 118-120.