

爱因斯坦 1916 年关于黑体辐射公式的重新推导

吴晓松, 蒋自秀, 李广东

重庆涪陵第五中学校 重庆

【摘要】1900 年, 普朗克基于能量量子化假说首次提出黑体辐射公式, 但其推导仍依赖经典电动力学。1916 年, 爱因斯坦通过引入玻尔原子定态假设和纯量子化辐射相互作用理论, 基本摆脱经典电动力学框架, 仅在极限情况下与之关联, 从而重新推导出普朗克公式。这一工作不仅验证了量子理论的普适性, 还为受激发射理论 (后发展为激光原理) 奠定了基础。文中系统梳理了爱因斯坦的推导过程, 从中可见其与维恩、普朗克方法的本质差异。

【关键词】 爱因斯坦; 黑体辐射; 受激发射

【收稿日期】 2025 年 6 月 18 日

【出刊日期】 2025 年 7 月 17 日

【DOI】 10.12208/j.sdr.20250127

Einstein's 1916 rederivation of the blackbody radiation formula

Xiaosong Wu, Zixiu Jiang, Guangdong Li

Chongqing Fuling No. 5 Middle School, Chongqing

【Abstract】 In 1900, Planck first proposed the blackbody radiation formula based on the energy quantization hypothesis, but his derivation still relied on classical electrodynamics. In 1916, Einstein introduced Bohr's atomic stationary state hypothesis and the theory of purely quantized radiation interactions, essentially breaking away from the classical electrodynamics framework and linking it only in limiting cases, thereby rederiving Planck's formula. This work not only verified the universality of quantum theory but also laid the foundation for the theory of stimulated emission (later developed into the principle of lasers). This article systematically reviews Einstein's derivation, highlighting its essential differences from the methods of Wien and Planck.

【Keywords】 Einstein; Blackbody radiation; Stimulated emission

1 辐射量子理论的已有基础

19 世纪末, 年轻的 w. 维恩 (图 1) 注意到了黑体辐射谱的曲线同麦克斯韦的速度分布律之间的异常相似性, 并根据热力学的原理证明了黑体辐射谱必有如下形式:

$$\rho(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (1)$$

3 年后, w. 维恩继续在这个基础上做了一个大胆而特殊的假设, 就是认为黑体辐射的机制类似于分子运动的特点, 将函数 $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ 具体化, 从而首先导出了一个黑体辐射谱的公式:

$$\rho(\nu, T) = \frac{\alpha}{c^2} \nu^3 e^{-\frac{\beta\nu}{T}} \quad (2)$$

(2) 式中的 α 和 β 为常量, 此公式就是众所周知的维恩公式。在维恩公式提出后的几年中, 它几乎与实验吻合的很好, 看起来像是一条严谨有效的自然法则, 然而好景不长, 到了 1900 年底, 实验物理学家们纷纷发现维恩公式在小的 $\frac{\nu}{T}$ 值时, 与实验

结果存在着系统的不一致性, 在小的 $\frac{\nu}{T}$ 值的情况下,

维恩公式所得出的辐射强度总是比实验测量出的要低一些, 而且这绝不是实验误差所导致的。为此, 普朗克 (图 2) 在 1900 年底根据不连续的能量元素假设, 才在他的奠基性的研究中建立了黑体辐射谱的正确公式:

$$\rho(\nu, T) = \frac{\alpha}{c^2} \nu^3 \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (3)$$

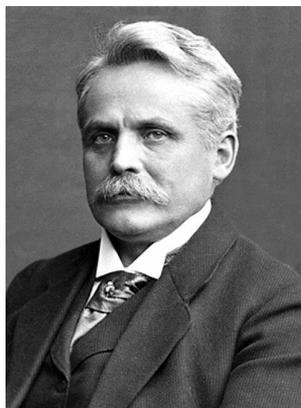


图 1 W.维恩 (1864-1928)

(3) 式中的 h 即普朗克常量, k 即玻尔兹曼常

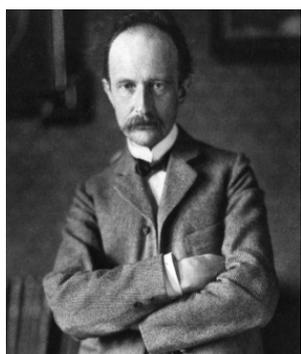


图 2 普朗克 (1858-1947)



图 3 瑞利 (1842-1919)



图 4 玻尔 (1885-1962)



图 5 爱因斯坦 (1879-1955)

若这类原子是属于温度为 T 的气体, 那么根据玻尔兹曼原理, 单位时间内出现在状态 Z_n 的相应次数 W_n , 由统计力学中关于正则的状态分布公式给出:

$$W_n = g_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \quad (4)$$

(4) 式中的 k 即玻尔兹曼常数, g_n 是关于原子中第 n 个量子态 Z_n 的特性常数, 与温度 T 没有关系。也可以看成量子态 Z_n 的统计权重。最后根据量子论所要求的能量状态分布应当仅由辐射的发射和吸收来决定, 参考普朗克公式 (3) 就得到一种异常简单和一般的方法。

2 关于辐射而发生的能量交换假说

2.1 自发发射

令 Z_m 和 Z_n 是气体原子的两个在量子论意义上可能的状态, 它们的能量 ε_m 和 ε_n 满足不等式: $\varepsilon_m > \varepsilon_n$, 现在通过吸收一个频率为 ν_{mn} 的光量子并获得能量为 $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ 。原子可以从状态 Z_n 跃迁到 Z_m 。相反地, 原子同样可以从状态 Z_m 跃迁到 Z_n , 同时

数。尽管普朗克得到了与实验完全一致的公式, 但其推导过程仍部分地建立在经典的电动力学基础上, 特别是其中电磁波驻波模式数的得出和瑞利(图 3)勋爵的方法完全一致, 而瑞利公式完全是根据经典力学和电动力学得出来得。

1913 年玻尔 (图 4) 发表了原子结构理论的三部曲。爱因斯坦 (图 5) 利用了玻尔原子结构理论中的基本原理之一, 即所谓的定态假设: 确定的一类原子, 若不考虑它的平动和转动, 可以仅仅处于这样一系列互不连续的状态: $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$, 这些状态上的能量分别为: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ 。或者说原子存在于一些具有分立能量值的定态之中。

发射出一个频率为 ν_{mn} 的光量子, 并损失能量 $\varepsilon_m - \varepsilon_n$, 而不用受到任何外界因素的影响, 即所谓的自发发射。于是单位时间内这种自发发射跃迁的次数就应该正比于原子处于量子态 Z_m 中的相应次数 W_m , 即: $A_m^n W_m$ 。其中的比例系数 A_m^n 简称自发发射常数。

2.2 辐射吸收与受激发射

如果在辐射场中有一普朗克谐振子, 由于普朗克谐振子受到影响, 辐射的电磁场对谐振子作了功, 从而改变了谐振子的能量。这个功根据谐振子的相和振荡场的相之间的关系而表现为正或为负。与此相应, 爱因斯坦引进了下列量子论假说。在具有频率为 ν 而辐射密度为 ρ_ν 的电磁场作用下, 一个原子可以从能量较低的状态 Z_n 跃迁到 Z_m , 在这个过程中原子吸收频率为 ν_{mn} , 能量为 $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ 的光量子。其跃迁次数为: $B_n^m W_n \rho_\nu$, 即正比于原子处于量子态 Z_n 中的相应次数 W_n , 其中, B_n^m 是一个比例常数, 表征着频率为 ν_{mn} 的辐射吸收, 简称辐射吸收常数。

同理在辐射的电磁场作用下, 原子从能量较高的状态 Z_m 跃迁到 Z_n 也完全是有可能的, 在这个过程中, 辐射频率为 ν_{mn} , 能量为 $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ 的光量子被释放出来。其跃迁次数为: $B_m^m W_m \rho_\nu$ 。即正比于原子处于量子态 Z_m 中的相应次数 W_m , 其中 B_m^n 是一个比例常数, 表征着频率为 ν_{mn} 的受激发射, 简称受激发射常数。

3 普朗克辐射定律的重新推导

在热平衡的条件下, 有多少从量子态 Z_n 到量子态 Z_m 的跃迁, 就有多少相反的跃迁。或者说: 辐射吸收=自发发射+受激发射。从而有: $B_n^m W_n \rho_\nu$ 必然等于 $A_m^n W_m$ 和 $B_m^m W_m \rho_\nu$ 两项之和。

$$B_n^m W_n \rho_\nu = A_m^n W_m + B_m^m W_m \rho_\nu \quad (5)$$

将 (4) 带入 (5) 有:

$$B_n^m g_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \rho_\nu = A_m^n g_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} + B_m^m g_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} \rho_\nu \quad (6)$$

移项并整理得:

$$A_m^n g_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} = \rho_\nu (B_n^m g_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} - B_m^m g_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}) \quad (7)$$

(7) 式两边同时除以 $e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}$ 得:

$$A_m^n g_m = \rho_\nu (B_n^m g_n e^{\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}} - B_m^m g_m) \quad (8)$$

(8) 式描述了频率为 ν_{mn} 的辐射密度 ρ_ν 和绝对温度 T 之间的一个关系。为了消去表征特殊跃迁的特定因子, 爱因斯坦参考了经典理论的极限情况, 也就是说辐射密度 ρ_ν 必然随着绝对温度 T 的无限增大而无限增大 (ρ_ν 与 T 的四次方成正比)。那么, 辐射吸收常数 B_n^m 和受激发射常数 B_m^m 之间必定有下列关系式成立:

$$B_n^m g_n = B_m^m g_m \quad (9)$$

借助于 (9) 式, 方程 (8) 稍加整理后就可以写成:

$$\rho_\nu = \frac{A_m^n / B_m^m}{e^{\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}} - 1} \quad (10)$$

正如爱因斯坦立即意识到的那样, 方程 (10) 和普朗克黑体辐射谱 (3) 具有相同的结构。对比 (3) 式, 立即可得:

$$\frac{A_m^n}{B_m^m} = \frac{\alpha}{c^2} \nu^3 \quad (11) \quad \text{和} \quad \varepsilon_m - \varepsilon_n = h\nu \quad (12)$$

方程 (12) 正是玻尔原子结构理论的第二个基本规则, 这个规则在索末非和爱泼斯坦 (图 6) 把它完善化之后, 已经成为科学的稳固基础。



图 6 索末非 (左 1868-1951) 和爱泼斯坦 (右 1883-1966)

爱因斯坦最后总结道: “当然, 我一点也不勉强地承认关于辐射吸收的三条假说导致了普朗克辐射公式这一事实, 并不说明三条假说就是成立的。但是, 假说的简单性, 轻而易举地进行考虑的那种普遍性, 以及所用的考虑和经典的电动力学和力学意义下的普朗克线性振子这一极限情况的自然联系, 都促使我认为很可能这一切就构成了未来的理论推导的基本轮廓。”

参考文献

- [1] 徐良英等, 爱因斯坦文集 (增补本) 第二卷[M]北京: 商务印书馆, 2009 (2017.1 重印)
- [2] (美) J.梅拉, H.雷琴堡.量子理论的历史发展第一卷第一分册[M]戈革等译.北京: 科学出版社出版, 1990
- [3] 曹则贤.黑体辐射: 一只下物理金蛋的鹅[M].世界图书出版公司,2024.
- [4] Rayleigh, J. W. S. XVI. On the law of complete radiation[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1900, 49(301): 539 - 540.
- [5] Jeans, J. H. On the partition of energy between matter and aether[J]. Philosophical Magazine, 1905, 10(59): 91 - 108.
- [6] Planck, M. Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum[J]. Annalen der Physik, 1901, 309(3): 553 - 563.

- [7] Einstein, A. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt[J]. Annalen der Physik, 1905, 322(6): 132 - 148.
- [8] Einstein, A. On the Quantum Theory of Radiation[J]. physikalische gesellschaft zürich. mitteilungen, 1916, 18:

47 - 62; physikalische zeitschrift, 1917, 18: 121 - 128.

版权声明: ©2025 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS