

## 例谈整体思想在初中数学解题中的应用与教学

党薇钰灿

扬州大学数学学院 江苏扬州

**【摘要】**整体思想是初中数学中重要的数学思想方法。本文立足整体思想的内涵，针对学生在解题方面存在的问题，结合初中数学解题实际，分析归纳整体思想在代数求值和方程与不等式典型题型中的应用，并探讨总结其教学培养方法，以期为初中数学解题教学提供参考。

**【关键词】**整体思想；初中数学；解题策略

**【收稿日期】**2025 年 11 月 14 日 **【出刊日期】**2025 年 12 月 8 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20250029

### Application and teaching of holistic thinking in junior high school mathematics problem-solving: A case-based discussion

Wei yucan Dang

School of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

**【Abstract】**Holistic thinking is a crucial mathematical mindset in junior high school. Based on its conceptual connotation, this paper examines the difficulties students encounter in problem-solving and analyzes the application of holistic thinking in solving typical problems, such as those involving algebraic evaluation, equations, and inequalities. Furthermore, it explores teaching approaches to cultivate this thinking, aiming to provide references for mathematics problem-solving instruction at the junior high school level.

**【Keywords】**Holistic thinking; Junior high school mathematics; Problem-solving strategies

整体思想作为重要的数学思想方法之一，强调从全局出发把握问题结构，通过整体分析与处理来简化解题过程。其形式较多，如整体代换、整体变形、整体设元等，借助整体思想，对问题进行深入分析，化繁为简，有效解决数学问题<sup>[1]</sup>。近年来，中考命题日益注重对学生数学思维能力的考查，整体思想已成为隐性且高频的考查要素。然而在实际教学中，学生对其理解停留在零散经验层面，出现局部思维固化等问题，难以实现有效迁移。面对新课改的要求与教学实际，教师应充分挖掘整体思想在解题中的应用，改善教学方法，从而提升学生思维能力。

#### 1 整体思想的内涵

整体思想是指数学解题过程中，将若干相关的数量关系或代数结构视为一个整体加以分析和处理的思维方式，其核心在于通过整体化视角把握问题内部结构，进行有目的、有意识的整体处理<sup>[2]</sup>。与侧重逐项运算的解题方式相比，整体思想更强调解题前的结构审视与策略选择，呈现全局视角、结构意识、化繁为简的特征。

#### 2 整体思想在初中数学解题运用中的障碍

在实际教学中，学生对整体思想的理解与运用存在一定障碍。这些障碍并非是因为学生运算能力不足，更多与其长期形成的解题习惯和方式有关。

部分学生在解题过程中表现出“局部思维固化”倾向。受长期算法训练的影响，学生往往将解题等同于对未知量的逐一求解，形成“见字母必求值、见方程必展开”的思维定式。在这一认知框架下，整体思想容易被误解为一种“特殊技巧”，而非具有普遍意义的解题策略。这种局部思维固化使学生即便在整体条件明

作者简介：党薇钰灿，女，在读硕士，研究方向：学科教学（数学）。

显的情境中，也难以主动跳出常规运算路径。

有些学生虽然能够在教师提示下使用整体方法，但在缺乏明确引导时难以自主识别可整体处理的结构。这反映出学生对代数结构的理解仍停留在形式层面，对完全平方结构、同构表达式等缺乏整体性认识。

### 3 整体思想在初中数学解题中的应用分类与策略

在初中数学解题中，整体思想并非以单一形式出现，而是根据问题类型与结构特征呈现出不同的应用样态，其在代数求值和方程与不等式的题目中比较集中。这类问题一般表面看起来计算复杂，实则内部结构清晰，若能从整体的角度把握条件与结论之间的关系，可在不求解未知量的前提下直接得到结果。下面对整体思想在不同题型中的应用方式进行分类梳理，并分析其内在解题逻辑与策略特征。

#### 3.1 代数求值问题中的整体思想

代数式求值类问题是中考数学中的重要题型。学生在解决此类问题时，通常采用逐个求解再带入求值的常规解题方式。该方法具有较强的通用性，但其运算过程较为繁杂、计算量较大，学生在解题过程中易产生计算失误。所以，在这类问题中若能站在全局视角，结合问题的条件或结论，将其视为一个整体，进行等价代换，则可化繁为简，顺利解题<sup>[3]</sup>。

##### 3.1.1 直接求值与整体代入

例 1：（2022 甘肃省卷）已知  $a-b=3$ ,  $ab=1$ , 则  $a^2+b^2=$ \_\_\_\_\_.

解：由完全平方公式  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , 得  $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ .

将  $a-b=3, ab=1$  作为整体带入，得  $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab = 11$ .

分析：本题并未给出某个字母的具体数值，若沿用常规思路分别求出各个未知量，不仅缺乏必要信息，也会人为增加解题难度。观察所求代数式，可以发现其结构可通过完全平方公式进行等价变形，不用分别求出  $a$  和  $b$  的值，而是将  $a^2 + b^2$  用已知的  $a-b$  和  $ab$  表示出来，直接整体代入求值。由此可见，本题的关键不在于求出各字母的值，而在于识别整体，以结构变形为桥梁，将已知条件与所求目标在整体层面建立联系，从而实现直接求值。

##### 3.1.2 分式结构与整体构造

例 2：已知  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$ , 则  $\frac{2x+3xy-2y}{x-xy-y} =$ \_\_\_\_\_.

解法 1：将未知式分子分母同时除以  $xy$ , 得  $\frac{2x+3xy-2y}{x-xy-y} = \frac{\frac{2}{y} + 3 - \frac{2}{x}}{\frac{1}{y} - 1 - \frac{1}{x}} = \frac{-2(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}) + 3}{-(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}) - 1}$ .

将  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$  整体代入，得  $\frac{2x+3xy-2y}{x-xy-y} = \frac{-2(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}) + 3}{-(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}) - 1} = \frac{-6 + 3}{-3 - 1} = \frac{3}{4}$ .

解法 2：由  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3$  进行通分，得  $y-x=3xy$ .

对未知式进行变形  $\frac{2x+3xy-2y}{x-xy-y} = \frac{-2(y-x)+3xy}{-(y-x)-xy}$ , 将  $y-x=3xy$  整体代入，得

$$\frac{2x+3xy-2y}{x-xy-y} = \frac{-2(y-x)+3xy}{-(y-x)-xy} = \frac{-6xy+3xy}{-3xy-xy} = \frac{-3xy}{-4xy} = \frac{3}{4}$$

分析：如果单纯从条件出发，显然无法直接求出  $x$  和  $y$  的值，观察未知式，未知式也无法与已知式直接建构联系。那么为了将两者建构联系，只能再深入思考是否可以将未知式或者已知式进行恒等变形从而建构联系。分式中常用的恒等变形是利用分数的性质进行通分或约分。由未知式可整理构造出  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$  的形式，再

整体代入以快速求解。本题还可以从已知式入手进行通分，即  $y-x=3xy$ ，显然未知式中  $x$  和  $y$  的系数相同，将未知式进行整理构造出关于  $y-x$  的形式，最后整体代入再约分化简。两种方式均可解出答案。

### 3.1.3 高次项运算与降次转化

例 3：已知  $x^2-2x-1=0$ ，求  $x^3-2x^2-x+5$  的值。

解法 1：已知  $x^2-2x-1=0$ ，即  $x^2-2x=1$ ，则

$$x^3-2x^2-x+5=x(x^2-2x)-x+5=x-x+5=5$$

解法 2：已知  $x^2-2x-1=0$ ，即  $x^2=2x+1$ ，则

$$\begin{aligned} x^3-2x^2-x+5 &= x \cdot x^2 - 2x^2 - x + 5 = x(2x+1) - 2x^2 - x + 5 \\ &= 2x^2 + x - 2x^2 - x + 5 = 5 \end{aligned}$$

分析：该题所给条件本质上是一元二次关系，而所求代数式中含有三次项，二者在形式上并不直接对应。解题的突破口并不在于求出  $x$  的具体值，而在于通过整理已知条件构造出可整体代入的二次表达式，通过整体代入，可将所求代数式原本涉及三次项的运算转化为二次，实现降次转化。即将已知式  $x^2-2x-1=0$  整理得  $x^2-2x=1$  或  $x^2=2x+1$ ，再将所求代数式变形构造出  $x^2-2x$  或  $x^2$  的形式，接着整体代入可将最高次降到 2 次，最后再次代入变形，即可求出最终结果。

## 3.2 方程与不等式问题中的整体思想

在初中数学中，方程与不等式问题是整体思想应用最为集中的领域之一。这类问题一般在形式上表现为结构复杂、次数较高或含有分式与参数，若沿用常规的去分母、展开或逐项求解的思路，容易导致运算量激增，甚至超出初中学生的能力范围。整体思想可通过对方程或不等式结构的整体审视，为问题的简化与求解提供有效路径。

### 3.2.1 解整式方程（组）

例 4：解方程  $(x^2+3x-4)^2+2(x^2+3x-4)-8=0$ 。

解：令  $t=x^2+3x-4$ ，则  $t^2+2t-8=0$ ，解得  $t_1=2$ ， $t_2=-4$ 。

再将  $t$  值分别代入  $t=x^2+3x-4$ ，有

当  $t=2$  时， $x^2+3x-6=0$ ，解得  $x=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$ ；

当  $t=-4$  时， $x^2+3x=0$ ，解得  $x_1=-3$ ， $x_2=0$ 。

分析：原方程在形式上呈现为四次方程，但其内部结构并非一般意义上的高次方程。通过整体观察可以发现，方程中两处出现完全同构的代数结构  $x^2+3x-4$ ，该结构以平方形式重复出现，构成了方程的核心组成部分，为整体换元提供了依据。若将  $x^2+3x-4$  看作一个整体  $t$ ，进行换元求解，求出关于  $t$  的一元二次方程  $t^2+2t-8=0$  的根，再代入  $t$  的值对  $x^2+3x-4=t$  求解，即通过换元和两个一元二次方程的求解可算出答案。

例 5：（2021 广州中考真题）若关于  $x, y$  的方程组  $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$  的解是  $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ ，则方程组

$\begin{cases} a(3x-2y)+b(2x+3y)=c \\ d(3x-2y)+e(2x+3y)=f \end{cases}$  的解是\_\_\_\_\_。

解：令  $m=3x-2y$ ， $n=2x+3y$ ，则原方程组可转化为  $\begin{cases} am+bn=c \\ dm+en=f \end{cases}$ 。

由题意得  $\begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$ ，则  $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} x=\frac{12}{13} \\ y=\frac{5}{13} \end{cases}$ 。

分析：本题的一般性思路是将  $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$  代入  $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$  中，进一步求出  $a$  和  $b$  的值，最后将其代入

$\begin{cases} a(3x-2y)+b(2x+3y)=c \\ d(3x-2y)+e(2x+3y)=f \end{cases}$  求解。显然这种方法的运算量是非常大的，且由于参数过多，学生容易混淆。若

能采用整体代换的思想，厘清方程间的关系，将待求方程组  $\begin{cases} a(3x-2y)+b(2x+3y)=c \\ d(3x-2y)+e(2x+3y)=f \end{cases}$  中的  $3x-2y$  和  $2x+3y$

看作整体，则会发现存在同构方程组，不难得出  $3x-2y$  和  $2x+3y$  的值，从而构造二元一次方程组，求解即可。这样既回避了逐一求值的繁琐过程，又大大降低了计算量。

### 3.2.2 解分式方程（组）

例 6 解方程  $\frac{2x^2+1}{x} + \frac{6x}{2x^2+1} = 5$ .

解 令  $y = \frac{2x^2+1}{x}$ ，则原方程化为  $y + \frac{6}{y} = 5$ ，即  $y^2 - 5y + 6 = 0$ ，解得  $y_1 = 2$ ， $y_2 = 3$ .

将  $y$  值分别代入  $y = \frac{2x^2+1}{x}$ ，有

当  $y = 2$  时， $\frac{2x^2+1}{x} = 2$ ，即  $2x^2 - 2x + 1 = 0$ ，判别式小于 0，无实数根；

当  $y = 3$  时， $\frac{2x^2+1}{x} = 3$ ，即  $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ，解得  $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$ .

经检验， $x = 1$  和  $x = \frac{1}{2}$  是原方程的解。

分析：大部分学生这类型题中总是按常规思路先通分进行去分母，再进行解整式方程的步骤，而这道题通分之后最高次会出现 4 次，对现阶段的学生来说是没有办法解决的。所以整体思想是本题求解的核心思想。通过观察，我们可以发现方程  $\frac{2x^2+1}{x} + \frac{6x}{2x^2+1} = 5$  中出现相同的整体  $\frac{2x^2+1}{x}$ ，可利用整体换元，将高次项的分式方程转化为学生能解决的一元一次方程进行求解。

### 3.2.3 解不等式（组）

例 7：已知关于  $x$  和  $y$  的方程组  $\begin{cases} x+2y=3m+1 \\ 2x+y=5m-2 \end{cases}$  的解满足  $x+y > 1$ ，求  $m$  的取值范围。

解：由  $\begin{cases} x+2y=3m+1 \\ 2x+y=5m-2 \end{cases}$ ，两个方程相加，得  $x+y = \frac{8m-1}{3}$ 。

将其代入  $x+y > 1$ ，则  $\frac{8m-1}{3} > 1$ ，解得  $m > \frac{1}{2}$ 。

分析：这是一道典型的中考题。学生容易先去解二元一次方程组，用  $m$  表示  $x$  和  $y$  的值，再将  $x$  和  $y$  代入不等式  $x+y > 1$ ，这种解法是可行的，但解题过程比较麻烦，计算量较大，而且无法体现策略性解题的思维含量。若关注到题设  $x+y$  这一整体，不用单独求出  $x$  和  $y$  的值，通过处理方程组构造出  $x+y$  的形式，直接整体代入，问题就变得简单了。此法绕过了求解方程组的步骤，直击问题核心，是解决此类问题的通法，高效且不易出错。

## 4 培养初中生整体思想的方法

### 4.1 注重概念理解，强化结构感知

数学概念是数学知识的基石，整体思想的形成要以扎实的概念理解为基础。相关研究指出，在概念教学中引导学生关注代数结构而非单纯运算规则，有助于其形成整体化的数学认知方式<sup>[2]</sup>。因此，在初中阶段，尤其是初一教学中，应有意识地将整体思想的渗透融入概念教学过程之中。在具体教学实践中，教师可通过对典型代数结构的反复呈现与辨识，强化学生对“整体”的结构感知。例如在教授完全平方公式时，不仅要求学生记忆公式，还可以通过公式变形帮助学生理解其结构意义。如例 1 这类问题中，引导学生意识到可通

过  $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$  将问题转化为整体处理。通过不断强化“结构先于运算”的意识，使学生逐步学会从整体角度审视代数式，提升其对整体思想的感知能力。

#### 4.2 观察对比典例，变式锻炼能力

整体思想的培养离不开例题讲解与变式训练。在解题过程中，教师要培养学生先观察问题特点和结构的习惯，引导学生发现问题中可以运用整体思想的地方<sup>[4]</sup>。可以先通过典型的例题进行对比训练和启发，再进行变式训练锻炼学生的思维和能力。例如，在解“已知求  $\frac{x}{x+y} = 2$ ，求  $\frac{y}{x+y}$ ”时，可先让学生采用未知量互

相转化的方法进行求解，再引导其发现已知式中可构造出未知式从而直接求值。随后可设计变式题，如改变比例或增加参数等方法，引导学生在不同情境中识别可整体处理的结构。通过“对比—变式—迁移”的训练方式，促进学生整体思想的灵活运用。

#### 4.3 丰富教学模式，激发学生思维

在整体思想的教学过程中，单一的讲解式教学难以充分调动学生的思维主动性，所以教学不宜停留在方法讲解层面，而应通过问题引导、多解比较等方式，引导学生在思考与交流中逐步形成整体化的解题意识<sup>[5]</sup>。教师可通过问题引导、合作探究等教学方式，鼓励学生自主发现整体结构。所谓题无定法，教师在教学过程中应鼓励学生尝试运用不同的解题方法，例如有的题目可以运用整体构造，教师可以鼓励学生构造出不同的整体结构进行求解。当学生有多种解题方法或思路时，教师要积极鼓励学生来讲解。通过多样的、积极的教学模式，可以激发学生的思维，使学生更好地掌握整体思想。

### 5 结论与展望

整体思想是初中数学解题中重要的数学思想方法，在代数求值、方程与不等式等多方面应用广泛。面对教学实践中学生在解题过程中出现的问题，教师应当立足整体思想的内涵，充分挖掘其在解题中的应用，结合典型例题，精进教学方式，培养学生的整体思想，提升学生分析和解决问题的能力，促进数学思维水平的发展。将整体思想有机融入初中数学解题教学，有助于引导学生由程序性解题走向策略性解题，提升其数学思维品质与问题解决能力。后续研究可进一步结合课堂实证数据，探讨整体思想教学对学生解题行为与思维水平的长期影响，以丰富相关研究成果。

### 参考文献

- [1] 魏爽.整体思想在初中数学解题中的妙用[J].数理天地(初中版),2022,(17):87-88.
- [2] 方海宁.初中数学思想方法的意蕴及其在教学中的培养[J].中学教学参考,2021,(17):22-24.
- [3] 程小芹.整体思想在初中数学解题中的应用[J].语数外学习(初中版),2020,(04):28-29.
- [4] 郝宇飞.刍议整体思想在初中数学中的应用策略[J].数理天地(初中版),2024,(24):78-79.
- [5] 王二平.整体思想在初中数学解题中的应用——以“图形与几何”问题为例[J].数理天地(初中版),2022,(24):39-41.

版权声明：©2025 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS