

动量守恒定律与角动量守恒定律的协变性疑难

李学生

山东济南市长清第一中学 山东济南

【摘要】爱因斯坦认为相对性原理具有普适性，满足相对性原理是一个物理理论成立的必要条件。本文的分析表明：经典角动量守恒定律不具有伽利略变换的不变性，经典动量守恒定律虽然具有伽利略变换的不变性，但是对于非惯性系系不协变，这是相对性原理所不允许的。为此笔者重新表述角动量守恒定律和动量守恒定律，使其对于任何参照系都协变，巩固了协变性和对称性在现代物理学中的核心地位，最后对经典力学中三大守恒定律进行了比较，发现三大守恒定律表述形式既相似也有区别，这是对称的绝对性和相对性表现形式。

【关键词】角动量守恒定律；角动量定理；动量守恒定律；力学相对性原理；协变性

【收稿日期】2025 年 6 月 6 日

【出刊日期】2025 年 7 月 5 日

【DOI】10.12208/j.ije.20250248

The difficulty of covariance between the law of conservation of momentum and the law of conservation of angular momentum

Xuesheng Li

No.1 Middle School of Changqing, Jinan, Shandong

【Abstract】Einstein believed that the principle of relativity is universal, and satisfying the principle of relativity is a necessary condition for the validity of a physical theory. The analysis in this paper shows that the classical law of conservation of angular momentum is not invariant under Galilean transformation, while the classical law of conservation of momentum is invariant under Galilean transformation but not covariant in non-inertial systems, which is not allowed by the principle of relativity. Therefore, the author restates the laws of conservation of angular momentum and momentum to make them covariant in any reference frame, consolidating the core status of covariance and symmetry in modern physics. Finally, a comparison of the three conservation laws in classical mechanics is carried out, and it is found that the expression forms of the three conservation laws are both similar and different, which is the manifestation form of the absoluteness and relativity of symmetry.

【Keywords】Conservation law of angular momentum; Angular momentum theorem; Law of conservation of momentum; Principle of relativity in mechanics; Covariance

1 爱因斯坦对于相对性原理的坚信

相对性原理是物理学中一个具有普遍性的原理，是许多物理理论的基础。在牛顿力学框架下，力学相对性原理表明所有力学规律在不同的惯性系中具有相同的数学形式。在狭义相对论的框架下，力学和电磁学规律在所有惯性系中具有相同的数学形式。在广义相对论的框架下，所有物理规律在所有参考系中（包括惯性系、非惯性系）具有相同的数学形式。

爱因斯坦在 1927 年为纪念牛顿逝世 200 周年的文章中指出：“伽利略已经在认识运动定律上作了一个意义重大的开端。他发现了惯性定律和地球引力场中的

自由落体定律……。但是应当注意，上面这两条陈述都是讲的整个运动，而牛顿的运动定律则回答这样的问题：在外力的作用下，质点的运动状态在一个无限短的时间内应该如何变化？只有考虑到在无限短的时间内发生了什么（微分定律），牛顿才得到一个适用于任何运动的公式。”^[1]爱因斯坦认为：“我相信自然定律的简单性具有一种客观的特征，它并非只是思维经验的结果。”爱因斯坦之所以不愿意“舍弃相对性原理”，那是因为他坚信，“有两个普遍事实在一开始就给予相对性原理的正确性以很有力的支持。”爱因斯坦指出：“必须承认经典力学在相当大的程度上是真理……因

此,在力学的领域中应用相对性原理必然达到很高的准确度。”^[2]爱因斯坦指出:“由于我们的地球是在环绕太阳的轨道上运行,因而我们可以把地球比作以每秒大约 30 公里的速度行驶的火车车厢。如果相对性原理是不正确的,我们就应该预料到,地球在任一时刻的运动方向将会在自然界定律中表现出来,而且物理系统的行为将与其相对于地球的空间取向有关……但是,最仔细的观察也从来没有显示出地球物理空间的这种各向异性(即不同方向的物理不等效性)。这是一个支持相对性原理的十分强有力的论据。”^[2]爱因斯坦这段论述的逻辑非常清晰:如果能找到地球物理空间各向异性的证据,就可以证明“相对性原理”是不正确的!

相对性原理是一个地位非常高的原理,它背后有着深刻的哲学和美学思想,它不是一个物理理论,而是对于物理理论的一个要求,满足相对性原理是一个理论成立的必要条件。从数学角度来看,物理定律满足协变性是必要的但不是充分的,这是合乎逻辑的。任何一个正确的命题,它的逆命题不一定成立,而逆否命题一定成立。相对性原理在物理学中的权威性就由它的逆否命题表述来体现,它有否决权,不满足一定错误。

在科学中“一种对称性的发现比一种特定现象的发现意义重大得多,像旋转不变性和洛伦兹不变性这样的时空对称性,统治着整个物理学。”在创立狭义相对论时,爱因斯坦利用了洛伦兹变换的不变性,而在创立广义相对论时,他把变换不变性提升为物理学的普遍原理,并从引力质量与惯性质量等同这一经验事实出发,把某种变换不变性作为表示空间结构四维性和对称张量的引力方程的前提。洛伦兹说过:“爱因斯坦把方法倒了过来,他不是从已知的方程组出发去证明协变性是存在的,而是把协变性应当存在这一点作为假设提出来,并且用它演绎出方程组应有的形式。”汤川秀树曾经说过:“当回顾物理学史时,我们会发现,这个历史几乎可称之为错误史,在许多科学家所相出的所有理论中,大多数是错误的,因而没有生存下来。”

在经典物理学中理论的建立程序为:实验→方程→对称性,而爱因斯坦在狭义相对论的建立中倒转了这个程序:对称性→方程→实验,在广义相对论中爱因斯坦把这个倒转过来的程序又应用于引力场方程的建立。另外当把对称性的概念引入物理学中时,可以把运动的相对性作为一种对称性来看待。爱因斯坦追求的是一种普遍性的自然法则,他在《自述》中写到:渐渐地我对那种根据已知事实用构造性的努力去发现真实定律的可能性感到绝望了。我努力得越久,就越加失望,

也越加相信,只有发现一个普遍形式的原理,才能使我们得到可靠的结果。物理学是研究客观世界的基本结构和基本规律的一门学科,必须寻求一般规律。物理学家中总是倾向于相信,在地球上的实验室里发现的物理规律也适用于宇宙的其他角落,这是基于经验的一种朴素信仰。科学的发展也是在不断追求普遍的规律,牛顿的万有引力定律统一了地面上的落体定律与天体的运行规律,狭义相对论统一了电场和磁场。

机械能守恒定律、动量守恒定律和角动量守恒定律是经典力学三大动力学规律。机械能守恒定律与力学相对性原理关系的研究,国内是从熊秉衡先生 1964 年、1965 年在《物理通报》发表的《在不同惯性系中的机械能守恒定律》、《“在不同惯性系中的机械能守恒定律”一文的更正与补充》两篇文章开始的,此后各家杂志纷纷讨论,一直没有定论,分为三个学派:(1)机械能守恒定律不满足力学相对性原理;(2)机械能守恒定律满足力学相对性原理,但是不具有单独的协变性,因为对于同一个物理过程在一个惯性系里满足机械能守恒的条件,在其他惯性系里可能不满足守恒条件(机械能守恒条件各个版本教材描述并不一致);动能定理和功能原理都可由牛顿定律直接导出,是最基本的原理,都满足相对性原理,而机械能守恒定律不是最基本的原理,而是动能定理或功能原理的推论,只在特定条件下才成立,因此机械能守恒定律不一定满足相对性原理,必须对每个惯性系检验机械能守恒的条件是否满足。也就是说,在一个惯性系应用机械能守恒定律求解的问题,在另一个惯性系,须检验机械能守恒条件是否满足,如果不满足,就要从动能定理或功能原理出发求解。这个问题时至今日依然没有定论。

本文讨论动量守恒定律与角动量守恒定律的协变性问题。

2 目前教材对于动量定理、动量守恒定律、角动量定理和角动量守恒定律协变性的表述

设在一个惯性系 S 中, $\vec{F} = m\vec{a}$, 两边同时乘以过程经历的时间 dt , 得:

$$d\vec{I} = \vec{F}dt = m\vec{a}dt = m\frac{d\vec{v}}{dt}dt = m d\vec{v} = d\vec{p},$$

$$\text{或 } d\vec{I} = d\vec{p},$$

对有限过程 $\Delta\vec{I} = \Delta\vec{p}$, 这就是动量定理。

若 $\vec{F} = 0$, 则 $\Delta\vec{p} = 0$, 即动量守恒。

现在考虑另一个相对于惯性系 S 匀速运动的惯性系 S' , 如果 $\vec{F}$ 与参照系的运动状态无关, 则有 $\vec{F}' = \vec{F}$,

因此, 如果在一个惯性参照系中动量守恒, 在其它相对于 S 匀速运动的惯性参照系中动量也一定守恒, 即动量定理和动量守恒定律都满足力学相对性原理。

对于角动量定理, 由 $\vec{F} = m\vec{a}$, 两边同时左侧叉乘质点的位矢 $\vec{r}$, 得:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \times m\vec{v} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

或 $d\vec{L} = \vec{M}dt = d\vec{H}$, 对有限过程有:

$$\Delta\vec{L} = \int \vec{M}dt = \Delta\vec{H}, \text{ 这就是角动量定理。}$$

若 $\vec{M} = 0$, 则 $\Delta\vec{L} = 0$, 即角动量守恒。

在另一个相对于惯性系 S 匀速运动的惯性系 S' 中, 可类似导出角动量定理, 因此角动量定理满足力学相对性原理。由于质点的位矢与参照系有关, 因而力矩也与参照系有关。因此, 即使在一个惯性系中满足角动量守恒条件 $\vec{M} = 0$, 在另一个惯性系中可能不满足角动量守恒条件 $\vec{M}' = 0$, 即角动量定理满足力学相对性原理, 但角动量守恒定律可能不满足力学相对性原理, 必须对每个惯性系检验角动量守恒的条件是否满足。

对于非惯性系, 牛顿定律必须写成:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{惯性力}} = m\vec{a}$$

计入惯性力后, 可以像在惯性系中那样导出动量定理和角动量定理, 并进而讨论动量守恒和角动量守恒的条件。一般来说角动量守恒定律不满足相对性原理。

3 经典角动量(动量矩)守恒定律不满足伽利略变换的不变性

角动量(动量矩)守恒定律是反映质点和质点系围绕一点或一轴运动的普遍规律, 尽管角动量(动量矩)守恒定律可以从牛顿定律中推导出来, 但是它不受牛顿定律适用范围的限制, 不论是研究物体的低速运动还是高速运动, 不论是宏观领域的物理现象还是微观领域的物理过程, 角动量(动量矩)守恒定律已被大量实验证明是正确的, 无一相悖。角动量守恒的实质上对应着空间旋转不变性(体系整体绕任意轴 n 旋转 $\delta\varphi$ 时, 体系的哈密顿算符不变)。当体系处于中心对称场或无外场时, 体系具有空间旋转不变性。

角动量守恒定律满足相对性原理, 相对性原理是指物理规律在不同惯性参考系中应该具有相同的形式。也就是说, 无论参考系如何运动, 物理定律都应该保持不变。角动量守恒定律是一种基本的物理守恒定律, 它描述了一个系统在没有外部力矩作用时, 其角动量保持不变。在相对论中, 角动量守恒定律同样适用。当一

个系统从一个惯性参考系转换到另一个惯性参考系时, 角动量守恒定律的形式不会改变。无论参考系的运动状态如何, 只要没有外部力矩作用, 系统的角动量都将保持守恒。例如考虑一个旋转的物体, 在一个惯性参考系中观察到它的角动量守恒。当我们将参考系转换为另一个运动状态不同的惯性参考系时, 根据相对性原理, 角动量守恒定律仍然成立。相对性原理是相对论的核心原则之一, 它确保了物理规律的一致性和普遍性。角动量守恒定律作为一种重要的物理规律, 也遵循相对性原理, 因此角动量守恒定律满足相对性原理, 无论在哪个惯性参考系中观察, 只要没有外部力矩作用, 系统的角动量都将保持守恒。这一性质使得角动量守恒定律在各种物理问题的研究中具有广泛的应用。

下面首先研究一下角动量(动量矩)守恒定律的协变性问题, 以匀速圆周运动为例:

例 1 如下图, 有一质量为 m 的小球(视为质点), 在轻绳(忽略质量)的牵制下, 在光滑的地面上绕 O 点做匀速(速率为 v)圆周运动, 如果忽略地面和空气摩擦阻力, 问: 小球在地面系和沿 x 轴匀速运动的小车(设小车的速度为 u)坐标系($O_1-x_1y_1$), 角动量(动量矩)守恒定律是否都成立?

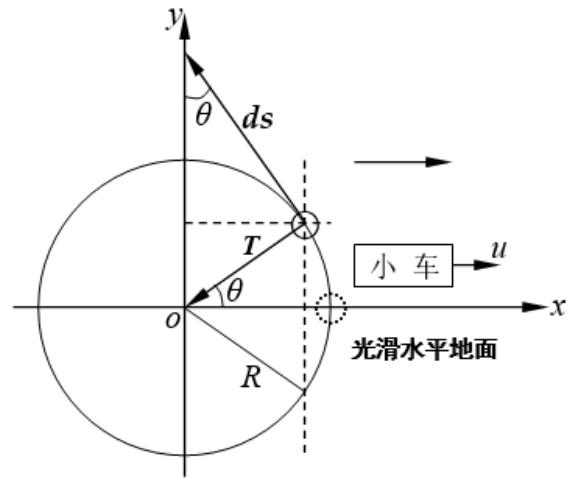


图 1 匀速圆周运动物体角动量守恒问题

解析: 地球质量视为充分大, 故稳定地保持为惯性系。

假设地面系质点的坐标为 (x, y) , 速度为 v , 横轴的分速度为 x' , 纵轴的分速度为 y' , 质点受到的力矩 M , 质点的角动量为 L , 拉力为 f , 拉力在 x 轴、 y 轴的分力分别为 f_x 、 f_y , 横轴的分加速度为 x'' , 纵轴的分加速度为 y'' ; 小车系质点的坐标为 (x_1, y_1) , 速度为 v_1 , 横轴的分速度为 x_1' , 纵轴的分速度为 y_1' , 质点受到的

力矩 M_I , 质点的角动量为 L_I , 横轴的分加速度为 x'' , 纵轴的分加速度为 y'' 。

(1) 在地面系——设初相为 0,

$$v=\omega R, x=R\cos\omega t, y=R\sin\omega t;$$

$$x'=-R\omega\sin\omega t, y'=R\omega\cos\omega t;$$

$$f_x=mx''=-mR\omega^2\cos\omega t, f_y=my''=-mR\omega^2\sin\omega t。$$

$$M=R\times f=0,$$

$$\text{质点对圆心的角动量 } L=mR^2\omega,$$

若方向不变, 角动量 (动量矩) 守恒定律成立。

(2) 小车系——将运动方程作伽利略变换, 写出小车系运动方程:

$$x_1=x-ut=R\cos\omega t-ut, y_1=y=R\sin\omega t; x'_1=x'_1-u=-R\omega\sin\omega t-u, y'_1=y'=R\omega\cos\omega t;$$

$$p=mv=(-mR\omega\sin\omega t-mu, mR\omega\cos\omega t, 0), r_1=(R\cos\omega t-ut, R\sin\omega t, 0),$$

$$f_x=mx''=-mR\omega^2\cos\omega t, f_y=my''=-mR\omega^2\sin\omega t。$$

$$L_1=r_1\times p_1=(0, 0, mR^2\omega+umR\sin\omega t-utmR\omega\cos\omega t),$$

即小车系角动量对时间导数计算:

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{d}{dt} (mR^2\omega+umR\sin\omega t-utmR\omega\cos\omega t)$$

$$=utmR\omega^2\sin\omega t$$

$$L_1'=(0, 0, utmR\omega^2\sin\omega t),$$

$$M_1=r_1\times f=(0, 0, utmR\omega^2\sin\omega t)=L_1'。$$

角动量定理成立, 但是角动量 $L_1=r_1\times p_1=(0, 0, mR^2\omega+umR\sin\omega t-utmR\omega\cos\omega t)$ 不守恒了, 因为 L_1 是含时变量, 凸显问题本质在于守恒条件不协变。

根据上面的计算可以得出, 角动量、合力矩不具有伽利略变换的不变性, 经典角动量 (动量矩) 守恒定律也不具有伽利略变换的不变性, 即不满足力学相对性原理, 文献[3~6]也说明了这个问题, 没有解决这个问题, 本文试图解决这一疑难。伽利略相对性原理仅指经典力学定律在任何惯性参考系中数学形式不变——所有惯性系都是等价 (平权) 的。

因为力学相对性原理要求所有惯性系等价, 同一个物理过程在静止惯性参照系角动量守恒, 在运动惯性参照系角动量不守恒, 这是力学相对性原理所不允许的。如果角动量 (动量矩) 守恒定律不满足伽利略变换的不变性, 就应当从牛顿力学中独立出来, 这样经典力学便由牛顿力学与角动量 (动量矩) 守恒定律共同组成, 体系就比较复杂了。

4 对于角动量 (动量矩) 守恒定律表述的重新思考
角动量 (动量矩) 守恒定律对于非惯性系, 需要引

入惯性力矩, 除非合力矩为 0, 一般角动量不守恒, 因而不能直接在非惯性系中应用角动量 (动量矩) 守恒定律, 不符合爱因斯坦的科学思想——物理规律对于所有的观察者都相同。朗道在《理论物理学教程 (第一卷) 力学 (第五版)》指出: 力学运动方程在伽利略变换下具有不变性。

笔者认为, 作为力学定律 (定理) 必须具有普遍性, 不具有协变性的命题不能称之为力学定律 (定理), 不能等同于一般的真命题, 对于某一个确定的物理过程, 在一个参照系成立, 在另一个参照系也必须成立, 即满足协变性的要求。经典角动量 (动量矩) 守恒定律不能满足这个要求, 而且在很多情况下质点受到的合力矩不等于 0, 因此有必要重新表述角动量 (动量矩) 守恒定律, 使其满足上述要求^[7]。

我们不能认为角动量守恒定律应用了这么长时间一定是完善的。有人认为: 惯性系对于力学规律是平权的, 意味着力学规律的数学表述具有协变性, 不是意味着力学规律的结论具有协变性。在一个惯性参考系中, 质点系相对某点角动量守恒, 意味着质点系对该点的力矩和为零, 如果变换到另外一个惯性系, 参考点发生变化, 质点系对该点的力矩和可能就不为零, 条件发生了变化, 结论自然也会发生变化。如果这样理解, 我们就可以去掉机械能守恒定律, 直接表述为动能守恒定律: 如果质点 (或者质点组) 受到合外力为 0, 则质点 (或者质点组) 的动能不变, 即若 $F_{\text{合}}=0$, 则 $E_k=\text{const}$ 。这样表述对于惯性系协变, 对于非惯性系不协变——条件发生了变化, 增加了非惯性力合外力不等于 0 了。如果表述为: 如果质点 (或者质点组) 受到合外力的功为 0, 则质点 (或者质点组) 的动能不变, 即若 $W_{\text{合}}=0$, 则 $E_k=\text{const}$ 。这样表述对于惯性系和非惯性系都不协变, 例如匀速圆周运动。

5 角冲量 (冲量矩) 的引入

在刚体转动中引入冲量矩的概念——力矩对时间的累积效应, 角冲量 (冲量矩) 的定义: 质点对于某一点 (或某轴) 受到的合力矩对于时间积分称之为角冲量 (冲量矩), 记为:

$$N(t) = \int_{t_0}^t M dt$$

这个定义在 2019 年全国科学技术名词审定委员会审定发布。

把角动量定理两边同时积分可以得到角动量定理积分形式——角冲量 (冲量矩) 定理: 质点对于某一点 (或某轴) 的角动量与该点受到角冲量 (冲量矩) 之差

$$\text{不变, 即 } L(t) - \int_{t_0}^t M dt = L(t_0),$$

该命题与角动量定理的微分形式是等价命题, 具有伽利略变换的不变性, 满足力学相对性原理。玻尔认为: “描述自然界的目的在于提示现象的真实本质, 而只在于尽可能远地把各种各样经验的各个方面之间的关系追溯出来。”

冲量矩大小等于作用在物体上的外力矩与作用时间的乘积, 方向与力矩相同, 也等于作用在物体上的冲量与力臂的乘积, 可用以描述物体转动状态变化的情况——转动物体所受的冲量矩等于这段时间转动物体动量矩的变化。著名的科学家兼哲学家怀特海指出, 不论探讨哪个领域, 任何事物的本质都不可缺少地具有两个原则: 变化和守恒。

6 角动量(动量矩)守恒定律与动量守恒定律的协变性问题

修正后角动量守恒定律: 对任意参考系, 存在常量 L_0 , 使得:

$$L(t) - \int_{t_0}^t M_{ext} dt = L(0) = \text{const}$$

其中 M_{ext} 为合外力矩。当 $M_{ext}=0$ 时, 简化为经典形式 $L=L_0$ 。 L_0 为内禀角动量, 对应 Noether 定理中的守恒量。内禀角动量对于所有的平动参照系相同, 与参考点的选择有关。

这样角动量(动量矩)守恒定律就是角动量定理的变形, 由于角动量定理对于所有的参照系都协变, 因此角动量(动量矩)守恒定律对所有参照系都协变, 对所有参考点都成立, 表达了旋转过程中的不变量。

证明: 由角动量定理

$$\frac{dL}{dt} = M$$

积分得:

$$L(t) - \int_{t_0}^t M dt = L(t_0)$$

因 $dL/dt=M$ 对所有参考系协变(牛顿定律协变), 故 $L(t) - N(t) = \text{const}$ 形式协变。

根据 Noether 定理, 角动量守恒源于空间旋转对称性。当参考系变换破坏对称性(如匀速运动小车系), 需通过冲量矩修正守恒量形式。经典角动量守恒定律

的守恒条件(合外力矩为零)不协变, 导致其在惯性系失效。通过引入冲量矩重构为:

$$L(t) - N(t) = \text{const}$$

可满足广义协变性, 且涵盖经典定律为特例(当 $M=0$ 时 $N(t)=0$)

对于孤立系统由于所受外力为 0, 角冲量(冲量矩)始终为 0, 因此角动量始终守恒, 这也是现代物理学中由于把场包括在内而不必引入角冲量(冲量矩)的原因。

广义相对论认为: 所有的参照系在描述自然规律方面都是等价的, 即所有的自然规律在一切参照系中的数学形式都是相同的。角动量定理对于所有参照系都成立, 这样表述角动量(动量矩)守恒定律与角动量定理积分形式比较, 只进行了一次恒等变形, 经典角动量(动量矩)守恒定律的一个推广, 所以对于所有参考系都成立, 符合爱因斯坦的思想——物理规律对于所有的观察者都相同。爱因斯坦认为, 物理理论分为“构造理论”和“原理理论”, 原理理论“应用分析而不是综合的方法, 其出发点和基础不是假设的要素, 而是经验上观察到的现象的一般性质、一般原理; 从这些性质和原理导出这样一些数学公式, 使其用于每一自身出现之处。”“原理理论的优点, 是它们逻辑上的完善, 和它们基础的牢固。”

文献[8]证明了动量定理对于所有的参照系都协变, 动量守恒定律仅仅对于惯性系协变, 对于非惯性系不协变, 为了解决这一矛盾类似地, 动量类比上面的角动

量, 合外力冲量 $I(t) = \int_{t_0}^t F dt$ 类比角冲量(冲量矩),

动量守恒定律表述为——对于任何参照系, 一个系统的动量与合外力冲量之差是一个常数(内禀动量), 即:

$$P(t) - I(t) = P(t_0) = \text{const}$$

内禀动量对于不同的参照系不同, 因为 $P(t_0)$ 对于不同的参照系不同。这样动量守恒定律就是动量定理的变形, 由于动量定理对于所有参照系都协变, 因此动量守恒定律对于所有的参照系都协变, 对所有方向都成立, 反映了空间的均匀性。

动量定理方程的两边同时叉乘力臂 R 就得到角动量定理, 同理动量守恒定律方程的两边同时叉乘力臂 R 就得到了角动量守恒定律。动量、角动量(动量矩)、角冲量(冲量矩)都不具有伽利略变换的不变性, 冲量具有伽利略变换的不变性。

建立广义协变的守恒定律一直是广义相对论中的基本问题之一, 文献[9]证明了动量定理对于所有参照

系都协变, 经典动量守恒定律对于所有惯性系守恒条件协变, 对于非惯性系不协变^[10], 在狭义相对论框架内经典动量守恒定律对于所有的惯性系也协变^[11]; 经典角动量(动量矩)守恒定律对于惯性系也不协变。重新表述角动量(动量矩)守恒定律、动量守恒定律后分别是角动量定理、动量定理的等价形式, 自然符合相对性原理的要求, 应用范围拓宽了, 不再仅仅适用于合外力为 0 或者合外力力矩为 0。

在机械能方面, 保守力作用下系统的拉格朗日量 L 定义为动能与势能之差: $L = T - U$, 与此类似。在均匀时空下, 体系的拉氏函数就反映了体系运动的能量。于是我们可以这样理解: 当一个体系处于外场中, 设法消除外场的影响, 使之处于局部均匀的时空时, 体系所具有的运动能量就是拉格朗日函数。类似地, 当一个体系处于外场中, 设法消除外场的影响, 使之处于局部均匀时空时, 体系所具有的运动动量就是系统的动量与合外力冲量之差; 体系所具有的运动旋转量就是系统的角动量与角冲量(冲量矩)之差。动量守恒定律最好称为运动量守恒定律, 角动量(动量矩)守恒定律最好称为旋转量守恒定律, 为了与传统理论一致, 不改名称也可以。

朗道的力学中说: “如果系统整体相对参考系 K' 静止, 则 V 是系统质心的速度, 而 μV 是系统相对于参考系 K 的总动量 P , 进而有 $M = M_{\text{内禀}} + R \times P$ 。就是说, 力学系统的角动量是由其相对静止的参考系中的“内禀角动量”和整体运动的角动量 $R \times P$ 构成。朗道《力学》将角动量分解为自转部分 $L_{\text{自}}$ 与轨道部分 $R \times P$ 。本文的 $L(t) - N(t)$ 实质统一了该分解, 其中 $N(t)$ 对应外力矩对于轨道项的贡献——角冲量(冲量矩)。”

笔者认为朗道所指的整体运动的角动量就是角冲量(冲量矩), 在这里多出一个物理量——角冲量(冲量矩), 类似于在某参考系观察一个静止电荷, 它只激发静电场, 只需用标势 ψ 描述, 但是变换到另一参考系时, 电荷是运动的, 除了电场之外还有磁场, 必须用 A 和 ψ 描述。在上面匀速圆周运动的实例中, 对于小车系而言 $mR^2\omega$ 是内禀角动量, 整体运动的角动量——角冲量(冲量矩)为:

$$umR\sin\omega t - utmR\omega\cos\omega t,$$

角动量为

$$mR^2\omega + umR\sin\omega t - utmR\omega\cos\omega t,$$

角动量与角冲量(冲量矩)之差为 $mR^2\omega$,

这个守恒量是对于所有的平动参照系相同, 只与参考点的选择有关。

在上面的命题中, 当合力矩也等于 0 时, 便是经典角动量(动量矩)守恒定律, 符合对应原理要求, 即经典角动量(动量矩)守恒定律是上述命题的一个特例, 经典角动量(动量矩)守恒定律在运动系需要增加一个物理量——角冲量(冲量矩), 对于固有参照系这一项正好为 0。对于同一个物理过程, 不同参照系的观察者测量的机械能(动能+势能)、动量与冲量之差、角动量与角冲量(动量矩与冲量矩)之差都是协变量, 都是常量或者都是变量。

在地球绕日运动的椭圆轨道中, 以太阳为参照系角动量守恒, 以相对于太阳匀速运动的参照系看来角动量不守恒, 但是角动量与角冲量(冲量矩)之差守恒。地球围绕太阳公转, 以太阳为参考点, 地球看做质点的话, 受到的合力矩为 0, 可是事实上地球并不是质点, 其内部存在着其他力, 因此地球的公转的角动量应该稍微减少, 不过日—地轨道角动量是十分巨大的, 相比之下地球的自转角动量十分渺小, 不容易观察而已。

容易验证在上面的匀速圆周运动中, 考察上述命题显然满足伽利略变换的不变性。假设把单摆固定在地面上, 在地面上有一辆匀速运动的小车, 在小车系看来摆锤的角动量不守恒, 但是角动量与角冲量(冲量矩)之差守恒。本文验证了相对性原理和单独的协变性是一回事, 方程的协变性是相对性原理的表现形式, 文献[12-18]的观点是完全错误的, 文献[19]详尽地分析了相对性原理和协变性的关系, 本文不再赘述。文献[20]指出: 国外大学物理对伽利略变换的描述不仅考虑所有惯性系中时间、加速度、受力的不变性, 同时阐述了伽利略变换下动量守恒与机械能守恒不变性的关联和必然性。反观我们国内的教材(包括使用最普遍使用的教材)对这部分描述几乎是模板式轻描淡写, 描述也仅仅是在绝对时空中的两个惯性系之间简单的速度变换式。多数教材把相关内容放在狭义相对论的开始, 几乎没有描述伽利略变换最核心的一些内容——牛顿运动定律的不变性和守恒定律不变性的关联和必然性。由于国内大学物理教材普遍对这部分讨论的不足, 导致大、中学生对这部分概念认识模糊甚至是混乱。

文献[21]在广义相对论中建立了广义协变的角动量(动量矩)守恒定律, 在广义相对论中由于没有力, 只有时空的弯曲, 因此也无需引入角冲量(冲量矩)。

在牛顿力学理论中常可讨论一群质点所组成的质点系, 质点与质点之间可以存在内力, 这些内力可以是超距力但满足牛顿第三运动定律。可是在狭义相对论

中,不可能存在超距力,必须引入场的概念。不但力的作用要用场的作用来表示,甚至质点的分布也要用物质场的分布来表示。这样根据场的理论,再加上时空均匀性的条件,才能推导出一个物理体系的能量-动量守恒定律。在牛顿力学理论中,质点的动量和能量是两个彼此独立的物理量,动量守恒定律、能量守恒定律是两个彼此独立的定律;可是在狭义相对论中,质点的动量和能量紧密结合成四维动量,因而动量守恒定律、

能量守恒定律合并成能量-动量守恒定律,亦即四维动量守恒定律。

文献[22]仅仅从惯性系考察经典动量守恒定律得出动量守恒定律对于所有的惯性系都协变,如果考察非惯性系就可以得出经典动量守恒定律不协变,不满足爱因斯坦广义相对论性原理。文献[22]误认为转动势能不变得出经典角动量守恒定律具有伽利略变换不变性的错误。

表 1 力学中三大守恒定律的比较

	描述质点的物理量	蕴藏在场中的物理量	诺特荷	守恒条件	适用的参照系
机械能守恒定律	动能	保守力做功的相反数=势能	$E=\text{动能}+\text{势能}=\text{const}$ (动能—保守力的功= const)	只有稳定场(保守力场)	所有参照系,对于不同的观察者守恒量不同,满足协变性要求。
动量守恒定律	动量	冲量的相反数	$T=\text{动量}-\text{冲量}=\text{const}$	恒成立	
角动量守恒定律	角动量(动量矩)	角冲量(冲量矩)的相反数	$R=\text{角动量}-\text{角冲量(动量矩}-\text{冲量矩})=\text{const}$	恒成立	

证明:证明:因为:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_k(v)}{dv} \frac{dv}{dt} + \frac{dE_p(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = mva - Fv = mva - mav = 0,$$

所以机械能守恒定律是时间均匀性的体现。机械能守恒定律满足相对性原理的要求,机械能守恒定律对于所有参照系都协变。

因为:

$$\frac{dp - Fdt}{ds} = \frac{dmv}{ds} - \frac{Fdt}{ds} = \frac{mdv}{ds} - \frac{madt}{ds} = \frac{madt}{ds} - \frac{madt}{ds} = 0,$$

所以动量守恒定律是空间均匀性的体现。动量守恒定律满足相对性原理的要求,动量守恒定律对于所有参照系都协变。

因为:

$$\begin{aligned} \frac{d(r \times p) - r \times Fdt}{d\theta} &= \frac{r \times (dmv)}{d\theta} - \frac{r \times Fdt}{d\theta} \\ &= r \times \frac{mdv}{d\theta} - r \times \frac{madt}{d\theta} = r \times \left(\frac{mdv}{ds} - \frac{madt}{ds} \right) \frac{ds}{d\theta} \\ &= r \times \left(\frac{madt}{ds} - \frac{madt}{ds} \right) \frac{ds}{d\theta} = 0, \end{aligned}$$

所以角动量守恒定律是空间旋转不变性的体现。角动量守恒定律满足相对性原理的要求,角动量守恒定律对于所有参照系都协变。

当然动量守恒定律、角动量守恒定律也可以类似于机械能守恒定律的表述方法表示为之和的形式,只是形式的变化,没有实际的意义,例如把冲量的相反数叫做动量流(动量势),角冲量的相反数角动量流(角

动量势),这样就可以统一为:动能+势能= const ,动量+动量流= const ,角动量+角动量流= const 。三大守恒定律也都可以表示为差的形式:质点的动能与所受保守力功的差不变。这是一种协变类比,协变类比方法又称数学相似类比法,根据对象的属性之间可能具有某种确定的协变关系(即函数关系)而进行推理的一种科学推理方法。协变类比是建立在自然界和谐统一的基础上,这种和谐统一表现在各种现象领域的数学形式的“惊人的类似”。

在动能定理中是合外力的功,在机械能守恒定律中是保守力的功,问题的关键在于非保守力的功不能定义势能。耗散力做功熵增加,不具有可逆性。在没有外力的作用下,质点的动能、动量、角动量都守恒,这是惯性的表现形式。

对于同一个物理过程,不同参照系的观察者测量的机械能(动能+势能)、动量与冲量之差、角动量与角冲量(动量矩与冲量矩)之差都是协变量,都是常量或者变量。经典动量守恒定律、角动量(动量矩)守恒定律分别是动量定理、角动量定理的特例,不是等价形式,类似于机械能守恒定律中质点势能不变(或者保守力不做功)时,质点动能也不变,显然不是对于任何参照系都协变,因为保守力在一个参照系不做功,在另一个参照系可能会做功,即质点的动能在一个参照系守恒,在另一个参照系可能不守恒,例如匀速圆周运动中的质点。三大守恒定律表述形式既相似也有别,这是对称的绝对性和相对性的表现形式。“对称性原理在上述研究工作中起着重大作用,它能使我们从事物之间的联系上考虑问题,从而使我们迅速抓住问题的实质。”

在牛顿力学中把牛顿第一定律、第二定律、第三定律作为实验定律,可以推导出动量守恒定律,如果把动量守恒定律作为实验定律,也可以推导出牛顿第一定律、第二定律、第三定律,把 $\mathbf{P}(t) - \mathbf{I}(t) = \mathbf{P}(t_0)$ 对于时间 t 求导数就得出牛顿第二定律: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, 在牛顿第二定律中令 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 就得出牛顿第一定律 $\mathbf{v} = \text{const}$ (这样处理牛顿第一定律可以看做是牛顿第二定律的特殊情况,原来的表述牛顿第一定律是牛顿第二定律的基础,不是特殊情况),对于两个相互作用的物体动量守恒,作用力和反作用力大小一定相等,方向一定相反,否则动量就不守恒了。

牛顿力学理论中容许超距力 (在弹簧振子和单摆问题中弹力虽然是接触力,但是由于力源不是研究对象,仍然按超距力处理), 须引入势能、冲量、角冲量 (冲量矩)。可是在狭义相对论中,若考虑电磁场的能量、动量、角动量,则只有接触作用,不需引入势能、冲量、角冲量 (冲量矩)。例如狭义相对论中质能方程的推导可以看到狭义相对论中无需考虑势能——在经典力学中,物体的动能是使物体从静止状态到具有速度 $\mathbf{v}$ 的状态,这一过程中外力 $\bar{\mathbf{F}}$ 所做的功,即:

$$E = \int_0^L \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} \quad (1)$$

$$E = \int_0^L \frac{d(m\bar{\mathbf{v}})}{dt} \cdot \frac{d\bar{\mathbf{l}}}{dt} \cdot dt = \int_0^L \mathbf{v} \cdot d \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = mc^2 - m_0 c^2 = (m - m_0) c^2 = \Delta mc^2 \quad (2)$$

即 $\Delta E = \Delta mc^2$, 这就是著名的爱因斯坦质能方程,它同时还适用于宏观和微观粒子。(2) 式中的物体质量 Δm 的变化是由于运动而发生变化,能量 ΔE 也是由于运动而发生变化的。则:

$$mc^2 = m_0 c^2 + \Delta mc^2 \quad (3)$$

当物体静止时能量 $\Delta E = \Delta mc^2 = 0$ 。但物体仍具有静止能量 $m_0 c^2$ 。这表明,静止的物体内部存在着粒子的运动。

无论薛定谔方程还是狄拉克方程,都是以能量-动量关系为纽带经算符化而建立的。但是薛定谔方程的哈密顿算符里除了以动量表达的动能因子还含有描述势能的因子,狄拉克方程缺了后者,主要是相对论是场论,无需引进势能。牛顿力学中的动量守恒定律、角动量 (动量矩) 守恒定律与狭义相对论中动量守恒定律、角动量 (动量矩) 守恒定律的表述有一定的区别。狭义

相对论的能量-动量守恒定律特别适用于研究基本粒子之间,包括湮灭、创生等现象在内的反应,而牛顿力学理论的动量守恒定律、能量守恒定律与质量守恒定律无法研究这些反应。

运动与相互作用观念是从物理学视角形成的关于运动、相互作用以及力与运动联系相关问题的基本认识^[23]。运动与相互作用观念涵盖了对物质的各种运动形式和相互作用机制的理解,有助于探讨物质在各种条件下是如何转化和传递能量的,被视为物质观念与能量观念之间的“桥梁”。经典力学研究问题的方法的重要特征就是不变性的思维方法,它贯穿于经典力学的形成和发展过程。物理规律在惯性系中无论在何处、何时、在何方向都具有不变性,它制约了惯性系的时空结构。正由于这种不变性自然地导出了能量、动量及角动量 (动量矩) 守恒定律,守恒定律反映了自然界对时空结构不变性要求的普遍规律。物理学的任务是要发现普遍的自然规律而规律的简单的形式之一是它表示了某物理量在过程中的不变性。寻求自然过程的不变量是物理学极为重要的研究方向。

7 结语

角动量守恒定律对于惯性系不协变,原因在于守恒条件不协变 (合外力矩为 0)。本文通过引入角冲量 (冲量矩) 重构为 $\mathbf{L}(t) - \mathbf{N}(t) = \text{const}$, 对所有参照系都协变。经典动量守恒定律对于惯性系协变,对于非惯性系不协变,通过力学中三大守恒定律类比,重新表述动量守恒定律,使其对于所有参照系都协变,三大守恒定律实现了统一性。

物理学界很久以来一直就有个不成文的规则或约定: 牛顿定律服从力学相对性原理,故由牛顿定律推导出的一切规律都应服从力学相对性原理。当旧理论在一般条件下不适用时,新理论就成为科学家们追逐的重点,科学家纷纷加入到新理论的研究中。如果机械能守恒定律 (以及由此得出的伯努利方程)、角动量 (动量矩) 守恒定律和声波运动方程不服从力学相对性原理^[13,24],而牛顿力学满足力学相对性原理,那么它们应当从牛顿力学中独立出来,这样力学结构体系将会发生改变。1991 年 11 月《大学物理》刊发了北京师范大学、中国人民大学物理系管靖教授的文章《力学相对性原理与机械能》,指出: 我们确可以找到由牛顿定律导出而又不满足相对性原理的定理和推论,提出一个不应忽视的问题^[25-26]。

本文通过重新表述动量守恒定律和角动量守恒定律,使其满足爱因斯坦的广义相对性原理。

参考文献

- [1] 爱因斯坦著,许良英、范岱年编译.爱因斯坦文集(第一卷)[M].北京:商务印书馆.1976:223-224.
- [2] 爱因斯坦著,杨润殷译.狭义与广义相对论浅说[M].上海:上海科学技术出版社.1964:12-17.
- [3] 高炳坤.用伽利略变换审视牛顿力学[J].大学物理.2010年第29卷第6期:1-2,8.
- [4] 易双萍.不同惯性系中的力学规律[J].工科物理(现名:物理与工程).1998年第8卷第5期:18-22.
- [5] 顾国锋.力学守恒定律的相对性[J].桂林市教育学院学报(综合版).1995年第三期:76-78.
- [6] 唐淑凡.力学量的守恒性与力学定律的不变性[J].娄底师专学报.1986(3):59-64.
- [7] 刘一贯.关于机械能守恒定律的协变性[J].华南师范大学学报(自然科学版).1985(1):155-157.
- [8] 许钟城.动量定理、动量守恒与参照系[J].河池师专学报.1990年第三期(理总第十一期):30-32,13.
- [9] 章鹏.非惯性系中的动量定理和动量守恒定律[J].重庆建筑大学学报.第16卷第1期,1994(3):99-102.
- [10] 李铁.非惯性系中的动量定理和动量守恒[J].电子科技大学学报.第33卷第5期,2004年10月:623-626.
- [11] 姜晓宜,籍延坤.质点系相对论动量守恒与质点速度的关系[J].大连交通大学学报.第29卷第2期,2008年4月:4-6.
- [12] 朱如曾.相对论力学中普遍定律的实用判别法和协变集的实用构造法[J].力学与实践.2002年第24卷第3期:70-71.
- [13] 朱如曾.相对性原理及其对自然界定律的协变性要求——机械能守恒定律协变性质疑的解答[J].大学物理.2000(2):15-19,26.
- [14] 朱如曾.相对性原理对普遍定律和非普遍定律参考系变换性质的不同要求——关于协变性质疑的进一步讨论[J].大学物理.2002(3):19-23.
- [15] 赵凯华.编者的话[J].大学物理,2002(3):18.
- [16] 赵凯华.澄清对相对性原理和协变性的误解[J].大学物理,2020年1月:12—13.
- [17] 杨立志,赵坚.关于机械能守恒定律是否满足相对性原理的探讨[J].物理教师,第41卷第5期,2020(5):65-67,72.
- [18] 赵坚.关于与机械能守恒相关的一些问题的探讨[J].物理教师,2019,40(5):62-65.
- [19] 鲁增贤,杨大伟,刘明成.相对性原理和协变性要求[J].吉林师范大学学报(自然科学版),82-83.
- [20] 周筑文.国外与国内大学物理对于伽利略变换不同描述的思考[J].物理与工程,2019(S1):112.
- [21] 段一士,冯世祥.广义相对论中广义协变的角动量守恒定律[J].物理学报,第44卷第9期,1995年9月:1373-1380.
- [22] 周筑文.物理学对称美和物理核心素养的培养[J].贵州师范学院学报,第35卷第12期,2019(12):51-56.
- [23] 付雨晴.高中物理教学中运动与相互作用观念的建构研究[D].大连:辽宁师范大学,2022,04,01.
- [24] 李学生.声波方程满足伽利略变换下的形势不变性.百科论坛,2020年第6期05卷:268.
- [25] 管靖.力学相对性原理与机械能.大学物理,1991(11):21-24.
- [26] 刘明成.对一道困扰中国力学教学40多年习题的思考.2025年全国高等学校物理基础课程教育学术研讨会论文集.清华大学出版社,2025年7月:20—27.

版权声明: ©2025 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS