初中常见“矩形翻折模型”分类与解题探究

魏嘉铭

扬州大学数学科学学院　江苏扬州

【摘要】新课标将几何直观和空间观念确立为初中数学核心素养的重要组成部分。在这一背景下，翻折问题作为几何领域的经典内容，凭借其独特的综合性特征，已成为中考数学命题中几何部分的重点考查方向。本文基于课标要求，系统研究了初中数学中的翻折问题的本质；通过案例分析法，依据翻折后顶点位置（边上、外部、内部）对模型分类，结合轴对称性质与勾股定理构建解题框架；最后，通过 2024 年江苏无锡中考真题为案例，完整呈现了多知识点融合应用的解题策略，目的在于使读者通过该类题型的理解完善自身的几何核心素养。

【关键词】翻折模型；解题策略；初中数学

【收稿日期】2025 年 5 月 14 日 **【出刊日期】**2025 年 6 月 18 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20250017

Middle school common “Rectangle Folding Model” classification and problem solving exploration

Jiaming Wei

College of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】The new curriculum standards have established geometric intuition and spatial awareness as key components of core mathematical literacy in junior high school mathematics. Against this backdrop, folding problems, as a classic topic in geometry, have become a focal point in geometry-related questions on the junior high school entrance exam due to their unique interdisciplinary nature. This paper systematically explores the essence of folding problems in junior high school mathematics based on the curriculum standards; using case analysis, classifies models based on the position of vertices after folding (on the edge, outside, or inside), and combines axis symmetry properties with the Pythagorean theorem to construct a problem-solving framework; finally, using the 2024 Jiangsu Wuxi high school entrance exam as a case study, it fully presents a problem-solving strategy that integrates multiple knowledge points, aiming to help readers enhance their geometric core competencies through understanding this type of problem.

【Keywords】Folding Model; Problem Solving strategy; Junior High School Mathematics

1 引言

《义务教育数学课程标准（2022 年版）》明确将抽象能力、运算能力、几何直观、空间观念、推理能力、数据观念、模型观念、应用意识及创新意识列为初中数学核心素养培养目标[1]。通过对近年各省市中考数学试卷的查找与对比，笔者发现翻折类问题已成为考查学生几何直观能力的一个重要载体。这类试题不仅要求学生具备扎实的平面几何知识，更需要较强的空间想象能力和实践操作能力，其综合性特征使其成为中考数学命题的热点与难点。基于此，本文将归纳初中几种典型的矩阵翻折模型[2]，深入探究其解题策略与方法，并在最后以 2024 年江苏无锡中考真题进行分析，总结出一定的解题突破策略。

2 分析翻折的本质

翻折问题，又称翻折变换，其本质是几何学中的一种轴对称变换[3]。其核心特征在于：将平面图形沿特定直线（称为对称轴或折痕）进行空间翻转，使得原图形与翻折后的图形关于该直线形成严格的轴对称关系。在解题过程中，学生需要深刻理解并把握翻折问题的两个基本性质[4]：其一，翻折前后的图形保持全等

关系，即对应边长度和对应角度大小均保持不变；其二，虽然翻折过程中图形的位置关系发生改变，但所有对称点连线均与对称轴垂直且被其平分。这些基本性质构成了解决翻折问题的理论基础和关键突破口。

常见的矩形翻折问题有两种，一种是求翻折后某一条边的长度，一种是求翻折后某一个角的角度[6]。对于这两者，其实解法是相通的。通常可以设某一未知边长（角度）为 x，然后根据翻折和轴对称的性质，将其他边的边长（角度）用含有 x 的代数式表示出来，然后选取合适的三角形，求长度可以运用勾股定理、全等三角形构建方程，求角度可以运用“三角形内角和为 180° ”或其他角度关系构建方程，并求解 x 值。数学的魅力在于研究变化中的不变性，尽管图形在翻折的过程中空间位置发生了变化，但作为翻折问题的本质，轴对称在其中是不变的，其内在的几何特性（如长度、角度）是不变的。解决这类问题的关键，在于运用方程思想建立变量关系，通过勾股定理沟通变量与不变量，特别是在涉及矩形和直角三角形等特殊图形的翻折问题中，这种思想方法往往能起到事半功倍的效果。

3 初中常见的矩形翻折模型

3.1 翻折后对应点落在图形上

例 1 如图 1，将矩形 $ABCD$ 翻折，使点 C 和点 A 重合，折痕为 EF，EF 与 AC 交于点 O。若 $AE=5$，$BF=3$，则 AO 的长为多少?

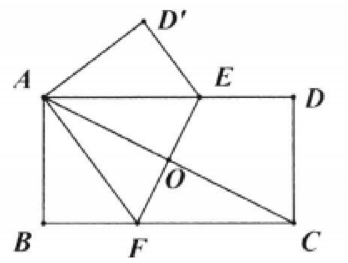

图 1

解析：本题要求的是矩形的半对角线 AO 的边长。要想求 AO 的长度，那就只需要求出矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的长度即可。

在矩形 $ABCD$ 中，因为 $AD // BC$， $AD=BC$，

所以 $\angle EFC=\angle AEF$ 。

由翻折得 $\angle EFC=\angle AFE=\angle AEF$，

所以 $AE=AF=5$ 。

由翻折得， $CF=AF=5$， $OA=OC$，

所以 $BC=BF+CF=8$。

在 $Rt\Delta ABF$ 中，由勾股定理得 $AB=\sqrt{AF^2-BF^2}=4$，

在 $Rt\Delta ABC$ 中，由勾股定理得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4\sqrt{5}$，

所以 $AO=\dfrac{1}{2}AC=2\sqrt{5}$ 。

方法点评：本题巧妙融合了矩形的基本性质与翻折变换的轴对称特性“翻折前后对应边保持长度不变”这一核心原理。在求解此类问题，关键在于系统分析图形在翻折前后的变换规律，精准把握对应点、对应线段之间的不变量关系。这种基于几何不变性的分析方法，往往能够化繁为简，为复杂的空间变换问题提供关键的解题突破口，使看似棘手的几何难题迎刃而解。

3.2 翻折后对应点落在图形外

例 2 如图 2，矩形纸片 $ABCD$， $AB=4$， $BC=3$，点 P 在 BC 边上，将 $ACDP$ 沿 DP 翻折，点 C 落在点 E 处， PE 、 DE 分别交 AB 于点 O 、 F，且 $OP=OF$，则 $\cos\angle ADF$ 的值为多少?

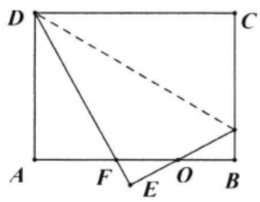

图 2

解析：本题要求的是翻折后$\angle ADF$的余弦值。要想求出$\cos\angle ADF$，就只要在$\mathrm{Rt}\Delta ADF$中求出直角边AD和斜边DF的长度即可。

由翻折得，$\Delta DCP \cong \Delta DEP$，

所以$DC = DE = 4$，$CP = EP$。

在$\Delta \mathrm{OEF}$和ΔOBP中，$\begin{cases} \angle EOF = \angle BOP \\ \angle B = \angle E = 90^\circ \\ OP = OF \end{cases}$，

所以$\Delta OEF \cong \Delta OBP$（AAS），得到$OE = OB$，$EF = BP$。

设$EF = x$，则$BP = x$，$DF = DE - EF = 4 - x$。

因为$BF = OB + OF = OE + OP = PE = PC$，$PC = BC - BP = 3 - x$，

所以$AF = AB - BF = 1 + x$。

在$\mathrm{Rt}\Delta DAF$中，由勾股定理得$AF^2 + AD^2 = DF^2$，

即$(1+x)^2 + 3^2 = (4-x)^2$，解得$x = \dfrac{3}{5}$。

所以$DF = 4 - x = \dfrac{17}{5}$，$\cos\angle ADF = \dfrac{AD}{DF} = \dfrac{15}{17}$。

方法点评：本题表面上是求一个角的余弦值，但经过深入分析可以发现，其本质仍是边长求解问题。解题的关键在于灵活运用翻折图形的轴对称性质，即“翻折前后的图形保持全等对应关系”，进而通过勾股定理建立方程求解。与前一题相比，本题的解题思路更具挑战性，对知识点的综合运用能力提出了更高要求。在解答此类问题时，要首先明确解题方向，准确把握题目考查的核心知识点，然后循序渐进地展开分析，逐步抽丝剥茧。只有掌握这种系统性的解题方法，才能在复杂的几何问题中游刃有余，最终顺利求得答案。

3.3 翻折后对应点落在图形内

例 3 将矩形$ABCD$按如图所示的方式翻折，BE，EG，FG为折痕，若顶点A，C，D都落在点O处，且点B，O，G在同一条直线上，同时点E，O，F在另一条直线上，则$\dfrac{AD}{AB}$的值为多少?

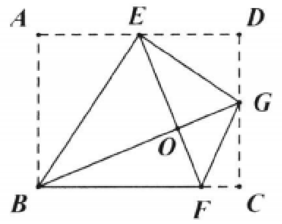

图 3

解析：本题要求的是两条边长的比值。要求$\dfrac{AD}{AB}$的值，就只要先将AB和AD表示出来即可，可以具体

求出它们的值，也可以用含字母的代数式表示。

由翻折得，$AE = OE$，$OE = ED$，

所以 $AE = DE$，即 E 为 AD 的中点，

同理可得 G 为 CD 的中点。

设 $CD = 2a$，$AD = 2b$，

则 $AB = 2a = OB$，$CG = OG = DG = a$，$BG = 3a$，$BC = AD = 2b$。

因为 $\angle C = 90°$，

所以在 $\mathrm{Rt}\Delta BCG$ 中，由勾股定理得 $CG^2 + BC^2 = BG^2$，即 $a^2 + (2b)^2 = (3a)^2$，

解得 $b^2 = 2a^2$，即 $b = \sqrt{2}a$。

所以 $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{2b}{2a} = \sqrt{2}$。

方法点评：本题与前两题不同，呈现的是一个经过三次翻折的矩形翻折模型。尽管三次翻折使问题复杂度显著提升，但只要紧扣翻折变换的核心特征——“翻折前后的对应边保持长度不变”，便能准确把握解题关键。在分析过程中，我们需要仔细辨别变量与不变量，合理设定未知参数，并以此为基础建立各量之间的数学关系。通过这种化繁为简的思维方式，原本复杂的几何问题终将豁然开朗，犹如拨云见日般清晰可解。

在中考真题中，翻折问题的命题设计绝非简单地套用单一模型，其考查的知识体系也绝非仅局限于轴对称性质、勾股定理或全等三角形等孤立知识点。这类题目往往通过精心设计，将多个几何模型有机整合，实现不同知识点的深度交融。尽管题目难度呈现递增趋势，解题思路也日趋复杂，但只要能够深刻把握对称变换的本质规律，透彻理解角度关系与长度比例等几何要素之间的内在关联，就必定能在面对复杂翻折问题时游刃有余，为攻克更高难度的综合问题奠定坚实的理论基础。

4 中考真题呈现

（2024 年江苏无锡中考数学第 27 题）如图 4，在四边形纸片 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$\angle ABC = 90°$，$BC = 8$，$AB = 12$，$AD = 13$。翻折四边形纸片 $ABCD$，使得点 C 的对应点 C' 始终落在 AD 上，点 B 的对应点为 B'，折痕与 AB，CD 分别交于点 M，N。

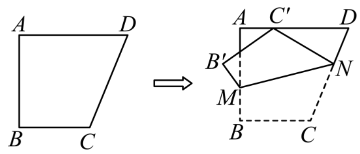

图 4

（1）当点 C' 与点 A 重合时，求 $B'M$ 的长；

（2）设直线 $B'C'$ 与直线 AB 相交于点 F，当 $\angle AFC' = \angle ADC$ 时，求 AC' 的长.

解析：（1）过点 C 作 $CH \perp AD$，则 $CH = AB$，$AH = BC$，再求出 HD，根据勾股定理求出 CD。当点 C' 与点 A 重合时，由翻折的性质可得出 MN 垂直平分 AC，N 与 D 重合，则有 $AM = MC$，设 $B'M = MB = x$，再利用勾股定理即可得出 $B'M$ 的长。

如图 4-1，过点 C 作 $CH \perp AD$，

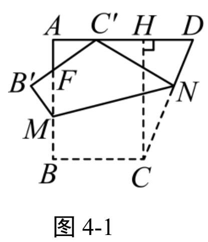

图 4-1

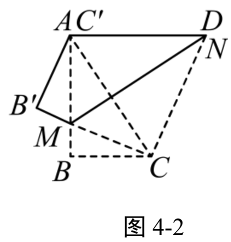

图 4-2

则有 $CH = AB = 12$， $AH = BC = 8$，

所以 $HD = AD - AC' = 5$，

所以 $CD = \sqrt{CH^2 + HD^2} = 13$， $\tan\angle ADC = \dfrac{CH}{HD} = \dfrac{12}{5}$。

当点 C' 与点 A 重合时，由翻折得出 MN 垂直平分 AC， N 与 D 重合，如图 4-2 所示，

所以 $AM = MC$。

设 $B'M = MB = x$，则 $AM = MC = 12 - x$。

因为 $\angle ABC = 90°$，所以在 $\text{Rt}\Delta MBC$ 中， $x^2 + 8^2 = (12 - x)^2$，

解得 $x = \dfrac{10}{3}$，即 $B'M = MB = \dfrac{10}{3}$。

（2）分两种情况，当点 F 在 AB 上时和当点 F 在 BA 的延长线上时，设 $AF = 5x$， $AC' = 12x$，则可以求出 $C'F$，利用 $\angle AFC' = \angle ADC = \angle B'FM$ 三个角的正切值相等表示出各线段的长度，最后利用线段的和差关系求解即可。

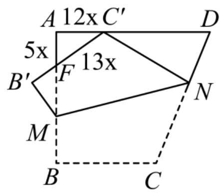

图 4-3

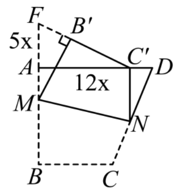

图 4-4

1° 如图 4-3，当 F 在 AB 上时，

由（1）可知 $\tan\angle ADC = \dfrac{CH}{HD} = \dfrac{12}{5}$。

因为 $\angle AFC' = \angle ADC$，所以 $\tan\angle AFC' = \dfrac{12}{5}$。

设 $AF = 5x$， $AC' = 12x$，则 $C'F = 13x$，

由翻折得， $B'C' = BC = 8$， $B'F' = 8 - 13x$。

因为 $\angle B'FM = \angle AFC'$，所以 $\tan\angle B'FM = \tan\angle AFC' = \dfrac{12}{5}$。

因为 $\angle ABC = 90°$，所以在 $\text{Rt}\Delta BFM$ 中， $FM = \dfrac{13}{5}(8 - 13x)$， $B'M = MB = \dfrac{12}{5}(8 - 13x)$，

所以 $5x + \dfrac{12}{5}(8 - 13x) + \dfrac{13}{5}(8 - 13x) = 12$，解得 $x = \dfrac{7}{15}$， $AC' = 12x = \dfrac{28}{5}$。

2° 如图4-4，当 F 在 BA 的延长线上时，

同上， $\tan\angle AFC' = \dfrac{12}{5}$。

所以在 $\text{Rt}\Delta AFC'$ 中，设 $AF = 5x$， $AC' = 12x$， $FC' = 13x$， $FB' = 13x - 8$，

在 $\text{Rt}\Delta MFB'$ 中， $FM = \dfrac{13}{5}(13x - 8)$， $B'M = MB = \dfrac{12}{5}(13x - 8)$。

则 $FB = 5x + 12 = \dfrac{12}{5}(13x - 8) + \dfrac{13}{5}(13x - 8)$，解得 $x = \dfrac{13}{15}$， $AC' = 12x = \dfrac{52}{5}$。

综上： $AC' = \dfrac{28}{5}$ 或 $\dfrac{52}{5}$。

方法分析：作为2024年中考真题，本题在命题设计上实现了重要突破。其基本图形由常规的矩形升级为更具一般性的任意四边形。同时，题目设置了一个位于图形内部、一个位于图形外部的两个对应点，这就要求考生必须综合运用前文所学的各类解题策略。本题的考查维度相当丰富，不仅涉及翻折变换的核心性质，还融合了勾股定理、锐角三角函数（正切）等多个重要知识点，充分体现了中考命题的综合性与创新性。在解题过程中，准确绘制符合题意的示意图至关重要。一个精确的图形能够将抽象的几何关系可视化，使解题思路更加清晰明确，为后续的推理计算提供直观的方向指引。

5 总结解题感悟

5.1 聚焦翻折对称特性，提升几何思维与解题素养

翻折问题本质上是对称问题。在求解翻折问题时，可以从两大视角展开：一是从全等角度出发，翻折前后的图形全等；二是从对称角度切入，图形关于折痕对称，且对应点的连线被折痕垂直平分，这一性质是解题的关键。还应多角度思考，结合勾股定理、相似三角形等隐含模型，简化条件，优化解题路径。同时，学生要结合图形进行论证，形成“洞察对称—标记关键不变量—搭建方程体系”的解题思路[7]，从而落实几何推理素养，提升解题能力。

5.2 借助折纸操作，直观感受图形变化[8]

借助折纸操作，学生通过直观操作感受图形变化，建立感性认识，理解翻折问题中的几何关系。这一操作符合课程标准中强调的实践操作与直观感知，有助于培养自身的几何直观和空间观念。折纸过程中的观察与思考，促使学生发现问题、提出假设，进而探索验证，这不仅锻炼了学生的数学思维能力，还体现了数学核心素养中的“数学抽象”与“逻辑推理”。

5.3 总结归纳解题方法，形成解题策略

通过上文深入探究了矩形翻折模型的解法，可以发现这些解法的思路具有内在关联性。要在日常解题过程中注意积累和总结，形成了一套适用的解题策略：一是立足翻折的本质特征，紧扣其几何属性，适当添加“辅助线”构建解题模型，为解题搭建桥梁；二是精准提取问题中的特殊模型与关系，灵活运用勾股定理和相似三角形的性质推导线段关系，从而简化问题；三是把握知识的关联性，结合题目中相关图形的性质，将复杂问题转化为特殊的几何或代数问题，实现化繁为简，高效求解。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022 年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2022:5-11.

[2] 王改林.矩形折叠问题分类辨析[J].数理天地(初中版),2025,(09):4-5.

[3] 韩玉.初中数学翻折问题解法探究[J].中学数学,2025,(10):106-107.

[4] 欧学慧.紧扣图形特征突破翻折问题——以 2024 年中考数学广东卷第 23 题为例[J].中学数学教学,2025,(01):55-59.

[5] 陈春兰.解答三类矩形翻折问题的方法探析[J].语数外学习(初中版),2024,(10):20-22.

[6] 李凤云.矩形的翻折问题[J].初中生学习指导,2024,(23):32-33.

[7] 罗峻.矩形折叠寻关联几何直观显路径[J].数理化学习(初中版),2024,(11):15-21.

[8] 蒋奇.聚焦折纸思维,探寻数学之美——一道中考题的思考[J].数理天地(初中版),2025,(11):26-27.