国际应用数学进展 2025 年第 7 卷第 3 期
Advances in International Applied Mathematics https://aam.oajrc.org/

# 中心对称矩阵代数的特征刻画与数值计算方法

卢晓明

广东工业大学 广东广州

**【摘要】**中心对称矩阵是一类具有特殊结构的矩阵，其在数值分析、图像处理、物理模拟及工程计算等领域具有广泛应用。由于其对称结构在代数计算中展现出独特的规律性，研究其代数特征不仅有助于深入理解矩阵理论，还能显著优化数值计算过程。本文从中心对称矩阵的定义与基本性质出发，深入分析其代数特征与谱结构，并系统探讨相关的数值计算方法，包括特征值求解、线性方程组求解及算法复杂度优化。通过构建结构化分解策略与高效迭代算法，本文旨在为工程计算中涉及中心对称矩阵问题提供理论支持与可行路径。

**【关键词】**中心对称矩阵；特征结构；数值算法；谱分解；迭代求解

**【收稿日期】**2025 年 11 月 14 日 **【出刊日期】**2025 年 12 月 8 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20250023

## Characteristic description and numerical computation methods of centrally symmetric matrix algebra

*Xiaoming Lu*

*Guangdong University of Technology, Guangzhou, Guangdong*

**【Abstract】**Centrosymmetric matrices are a class of specially structured matrices that find wide applications in numerical analysis, image processing, physical simulation, and engineering computation. Due to their symmetric configuration, these matrices exhibit distinctive patterns in algebraic operations. Studying their algebraic characteristics not only deepens the theoretical understanding of matrix theory but also significantly improves computational efficiency. This paper starts with the definition and basic properties of centrosymmetric matrices, then delves into their algebraic features and spectral structure. It systematically explores numerical computation methods related to such matrices, including eigenvalue computation, linear system solving, and algorithm complexity optimization. By developing structured decomposition strategies and efficient iterative algorithms, the paper aims to provide theoretical support and practical solutions for engineering problems involving centrosymmetric matrices.

**【Keywords】**Central symmetric matrix; Characteristic structure; Numerical algorithm; Spectral decomposition; Iterative solution

## 引言

中心对称矩阵（centrally symmetric matrix）在数学和工程领域具有重要地位。顾名思义，这类矩阵在主对角线以中心对称方式分布，即对任意元素 aija_{ij}aij, 都有 aij=an+1−i,n+1−ja_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j}aij=an+1−i,n+1−j，体现出一种以中心为轴的对称特性。这种结构广泛存在于图像滤波、光学信号处理、对称结构物理模拟和高性能计算等应用中。相比普通矩阵，中心对称矩阵在理论研究与数值操作上都具有更高的规则性和可控性。当前研究大多聚焦于对称矩阵、正交矩阵、稀疏矩阵等经典结构，然而对中心对称矩阵的系统刻画与计算方法仍较为分散，缺乏统一的分析框架和高效的工程实现方案。因此，本文围绕中心对称矩阵的代数本质与计算路径展开系统探讨，力求在保持理论严谨性的同时，提升其在实际数值分析中的可用性与计算效率。

作者简介：卢晓明（1995-）男，汉族，广东阳西人，硕士，研究方向：半群代数。

## 1 中心对称矩阵的代数性质分析

### 1.1 中心对称结构的定义与性质回顾

中心对称矩阵最基本的特征是其元素关于中心呈对称分布。若设 A∈Rn×nA \in \mathbb{R}^{n \times n}A∈Rn×n，则 AAA 是中心对称的充要条件为存在一个置换矩阵 JJJ，使得 JAJ=AJAJ＝AJAJ=A。其中，JJJ 为反向恒等矩阵（即反对角线为 1，其余为 0）。这一特性不仅使得矩阵具备较高的代数对称性，也为后续数值计算提供了便利。此类矩阵的对称性使其在乘法、转置及求逆等操作中表现出特定规律，如若 AAA 为中心对称矩阵，则其转置 ATA^TAT 和逆 A−1A^{-1}A−1（若存在）亦为中心对称矩阵。这种封闭性为算法设计提供了结构保障。

更进一步地，中心对称矩阵在奇异值分解（SVD）、特征值分解（EVD）等基本线性代数操作中也呈现出可预测性。例如，实对称中心对称矩阵的特征向量具有中心对称与反对称两类结构，且其特征值在一定条件下呈对称分布。这种特征可用于矩阵压缩、特征提取与低秩近似等算法的加速，实现计算复杂度的显著降低。事实上，中心对称矩阵所体现出的结构特性可视为一种“矩阵压缩冗余”的表现，其代数上的稳定性也成为后续章节中高效求解策略的理论支点。

### 1.2 中心对称矩阵与其他结构矩阵的比较

从矩阵结构分类角度看，中心对称矩阵虽不如对称矩阵那样通用，但在实际应用中却具有高度实用性。在图像处理中，尤其是涉及卷积核或滤波模板设计时，中心对称结构有助于实现空间平衡与边缘保留。例如在图像平滑滤波中使用的高斯核，其本质上就是中心对称矩阵的二维延伸。在这一应用背景下，对中心对称矩阵的结构化研究将直接影响算法的稳定性与处理效果。

此外，中心对称矩阵在形式上与反对称矩阵（如斜对称矩阵）、循环矩阵等存在交集与区别。反对称矩阵要求 AT=−AA^T＝-AAT=−A，而中心对称矩阵则强调在几何意义上的关于中心的镜像对称，两者在代数操作中形成对比。循环矩阵则是在行变换上具有循环平移结构，其快速傅里叶变换（FFT）性质使其适用于快速卷积计算。而中心对称矩阵则更加适用于“均衡中心-边界”场景下的建模问题，特别是在边界处理、对称映射与边界吸收等问题中具有天然优势。因此，从代数结构到应用语境，中心对称矩阵都呈现出独特的地位，值得在基础理论与应用算法中深入挖掘。

## 2 中心对称矩阵的谱特征与特征值分布规律

### 2.1 特征值对称性与谱分布模式分析

中心对称矩阵在谱结构上展现出鲜明的规律性，这一点为其在实际问题中的应用提供了理论支持。对于实对称的中心对称矩阵，常常可以观察到其特征值具有对称性或成对出现的规律。例如，当矩阵维度为偶数时，若矩阵的奇异值构成序列 {σ1,σ2,...,σn}\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}{σ1,σ2,...,σn}，则往往存在 σi=σn+1−i\sigma_i = \sigma_{n+1-i}σi=σn+1−i 的镜像对应关系。这种谱对称性使得在计算过程中可以仅计算一半的特征值，通过对称关系还原完整谱结构，从而显著降低计算开销。

在数学上，这种特征值对称性可借助对置换矩阵 JJJ 的共轭变换理解，即若 AAA 为中心对称矩阵，则有 JAJ=AJAJ＝AJAJ=A，由此可得 JA=AJJA＝AJJA=AJ。当 AAA 为实对称时，便可证明其特征向量可构成关于中心对称与反对称的两个子空间，分别对应于正交特征子空间。以二维图像矩阵为例，其灰度变化模式往往具备一定对称性，在进行主成分分析（PCA）时，这一谱分布规律可用于提升特征压缩与主轴提取的效率。

特征值分布的规律性不仅体现在其代数对称性，也影响着矩阵的条件数与稳定性。例如在结构力学问题中，中心对称刚度矩阵的特征值聚集性常意味着结构的模态特性具有空间稳定性，便于进行模态识别与局部分析。通过分析中心对称矩阵的谱图，可以快速识别矩阵的收敛行为、稳定边界及振荡频率等核心参数，对实际模型构建具有直接意义。

### 2.2 特征向量的结构特征与空间分布

在特征向量层面，中心对称矩阵同样展现出可预测的规律。设 A∈Rn×nA \in \mathbb{R}^{n \times n}A∈Rn×n 为实中心对称矩阵，若 xxx 是其特征向量，则其中心镜像向量 JxJxJx 也为特征向量，且对应同

一特征值。更进一步地，若 x≠Jxx \neq Jxx =Jx，则 x+Jxx + Jxx+Jx 与 x−Jxx - Jxx−Jx 分别构成中心对称向量与反对称向量，两者分别张成中心对称与反对称子空间。这种向量空间结构的分解，不仅具有理论上的解析价值，还可在图像压缩、振动分析等实际问题中加以利用。

例如，在图像奇异值分解过程中，中心对称图像矩阵的主特征向量往往集中在低频对称结构上。对这类图像的重构可以通过提取中心对称主成分来实现有效降维。类似地，在物理模拟中的固有振动分析中，中心对称矩阵的特征向量可用于识别结构对称性破坏的程度。当某一特征值对应的特征向量呈现强烈非对称性时，往往意味着结构中存在局部扰动或异构边界。从算法设计角度看，利用特征向量的对称性可以有效降低存储和计算复杂度。例如，在 Krylov 子空间方法中，通过构造对称与反对称子空间可并行生成正交基，加快迭代收敛速度。进一步地，结合投影方法与分块迭代策略，可以构建更高效的结构特征解算流程，实现中心对称矩阵在高维问题下的稳定解算。

## 3 中心对称矩阵的数值计算方法与算法优化

### 3.1 中心对称矩阵在线性系统求解中的高效策略

线性方程组的求解是各类数学建模与工程模拟中最为基础的计算问题。当系数矩阵具备中心对称结构时，其对称性不仅带来几何上的美观，更是计算层面上的高效突破口。传统求解方法如高斯消元法或 LU 分解在处理普通矩阵时，往往涉及大量重复运算，而中心对称结构则可以大大压缩这些重复步骤。在处理大规模系统时，若能识别出中心对称性，便可提前对矩阵进行降维处理或分区操作，有效节省内存资源，提升算法运行速度。

在工程实践中，例如结构力学、热传导仿真等问题，常常会遇到模型本身就具备对称性。此时生成的系数矩阵往往天然带有中心对称特征。通过将这些结构信息引入迭代算法设计中，如结合共轭梯度法的结构判断机制，不仅可以优化搜索方向，还能避免在解空间中反复绕行。此外，这类结构还对数值稳定性有正面作用，能够有效抑制舍入误差的积累，尤其适用于精度要求较高的科学计算任务。在一些需要频繁解线性系统的仿真平台中，预先构建基于中心对称结构的快速求解模块，已被证明能显著缩短整体计算时间。

### 3.2 特征值计算中的结构利用与分块加速方法

特征值和特征向量的求解在数值分析中同样具有重要地位，特别是在动态系统分析、模态识别和主成分提取等领域。而中心对称矩阵在特征结构上通常表现出谱对称性、向量模式对称性等特点，这些特性可用于构造结构化的特征求解方案。以传统的幂法、Jacobi 法或 Lanczos 法为例，当引入中心对称结构时，某些子空间的重复计算就可以被合并处理，计算路径更加清晰，存储成本也大幅下降。这种方式特别适用于高维稀疏矩阵场景，能够在保持求解精度的前提下，缩短求解时间。

在具体实施中，中心对称矩阵往往可以通过矩阵重排列与逻辑分块的方式，转化为具有更明显计算规律的子块矩阵。工程上可将其划分为对角区块、边界区块和中心对称映射区块，每个区块内部的计算均可独立完成，再通过对称规则组合得到最终结果。这种“分块—并行—重构”模式，特别适合现代计算架构中的多线程处理与 GPU 并行执行。举例来说，在图像滤波中的卷积操作，如果滤波核是中心对称矩阵，其应用于图像区域时的计算路径是完全对称的，因此可以同时在多个区域并行处理，提高图像处理效率的同时保持结果稳定。

## 4 中心对称矩阵的应用案例与发展展望

### 4.1 工程建模与图像处理中的典型应用

中心对称矩阵在工程建模和图像处理等实际领域中具有广泛而深入的应用。以结构工程中的有限元分析为例，建筑或桥梁结构的刚度矩阵在对称荷载或边界条件下常呈现中心对称分布。这种结构使得模型具有应力分布对称性，便于对称区域建模与结果复用。例如，在三维梁结构中，通过识别中心对称单元块，可以降低模型规模并提升解算效率。中心对称矩阵的良好谱特性也有助于识别局部模态共振，支持多尺度结构分析。

图像处理是另一个典型应用场景。在图像滤波、图像增强和边缘检测中，常用的卷积核（如高斯核、拉普拉斯算子等）都具有中心对称特性。这类矩阵通过在二维图像窗口中实现均衡加权，有效避免因边缘不对称而引发的伪影或信息失真。在实际操作中，中心对称核可用于图像的去噪、锐化或特征提取，其高效性和

稳定性来源于其结构内在的数值对称性。例如，在图像卷积过程中，中心对称矩阵使得核中心权重在处理图像边缘区域时保持稳定，有助于降低滤波误差。

此外，在地质模拟与水利工程建模中，地下结构或流场的参数矩阵往往具有自然对称性。中心对称结构的识别可作为前处理步骤，辅助网格划分与方程组简化。在此类应用中，中心对称矩阵不仅是一种数学结构，更是实际物理场景对称规律的数学表达。通过引入该类矩阵的代数与计算研究成果，可直接提升工程计算平台的建模能力与计算效率。

### 4.2 研究前沿与未来发展方向

尽管中心对称矩阵的研究已有一定基础，但其在高维计算、随机模型与人工智能领域仍具有巨大的发展潜力。在高维科学计算中，数据维度不断上升，传统矩阵计算面临存储瓶颈与计算冗余。中心对称结构可作为压缩存储与块矩阵处理的重要依据，特别是在张量分解、稀疏表示与低秩逼近中，其潜力仍有待系统挖掘。在概率与随机建模领域，引入中心对称结构的随机矩阵模型是一个新的研究方向。例如，带中心对称结构的 Wigner 矩阵或 Wishart 矩阵在描述对称性分布数据时具有更高拟合能力，可用于描述对称性测量误差、波动性协方差结构等问题。这类模型的谱分析、极限分布与稳定性分析是未来理论研究的重要方向。

人工智能和机器学习领域亦逐渐关注结构化矩阵的学习与表达能力。中心对称性可嵌入到图神经网络（GNN）或注意力机制中，用于强化模型对对称关系的感知。例如，在图像识别中加入对称约束或结构正则项，可以提升模型对对称图像的泛化能力和鲁棒性。同时，结构矩阵学习也可以被用于高维特征变换中的降维处理，提升计算速度与训练效率。在计算工具层面，随着计算硬件的发展，尤其是 GPU/TPU 等并行硬件的广泛使用，未来可进一步开发适配中心对称矩阵的并行计算框架和自动求导接口，实现结构识别、数值分解与梯度更新的自动化、模块化操作。结合现代编译优化技术，可实现对复杂中心对称结构在编译期进行图优化与调度重构，推动高性能计算平台支持更复杂的对称性建模任务。

## 5 结论

中心对称矩阵作为一种结构明确、性质优良的特殊矩阵类型，在理论研究与工程应用中均展现出重要价值。本文围绕其代数特征、谱结构、数值算法与应用场景进行了系统梳理与探讨，提出了多种高效计算策略与结构优化路径。未来，结合高维建模、AI 算法与并行计算框架，中心对称矩阵在科学计算与智能工程中将具有更广阔的发展空间，值得持续关注与深入研究。

## 参考文献


[1] 宋哲贤.广义反中心对称矩阵反问题的最小二乘解及其推广[D].东北电力大学,2023.

[2] 郭丽杰,韩明花,周硕.中心主子阵约束下广义反中心对称矩阵的二次特征值反问题[J].东北电力大学学报,2018,38(03):84-89.

[3] 王小雪,程宏伟,杨琼琼,等.子矩阵约束下广义反中心对称矩阵的广义特征值反问题[J].东北电力大学学报,2014,34(04):80-85.

[4] 谢冬秀,黄宁军.谱约束下广义中心对称矩阵的最佳逼近解及扰动分析[J].北京交通大学学报,2013,37(06):139-142.

[5] 潘劲松.中心对称矩阵和反对称矩阵的研究(英文)[J].应用数学,2013,26(03):600-610.

[6] 唐波伟.广义逆的反序律和中心对称矩阵的性质[D].陕西师范大学,2013.

[7] 吴险峰,张晓林.反中心对称矩阵的性质[J].高师理科学刊,2011,31(06):3-5.

[8] 李珍珠,周立平.对称广义中心对称矩阵的左右逆特征值问题[J].数学研究,2011,44(02):193-199.