

人工智能辅助《实变函数与泛函分析》课程教学改革的模式探讨

——以控制收敛定理与 Hahn–Banach 定理为例

李海绸, 王雪琴

华南农业大学数学与信息学院数学系 广东广州

【摘要】随着生成式人工智能(AI)、智慧教学平台和课堂互动工具的发展,高阶数学理论课程教学改革获得了新的技术支持。《实变函数与泛函分析》是典型的证明型高阶数学课程,教学中存在概念理解难、条件辨析难、证明结构复杂和个性化支持不足等问题。针对上述教学痛点,本文以“教师主导、学生主体、平台支撑、AI辅助”为基本理念,构建“智慧树—雨课堂—AI大模型”协同支持的“课前—课中—课后”一体化教学模式。本文选取控制收敛定理和 Hahn–Banach 定理作为典型案例,展示该模式在条件辨析和抽象证明教学中的应用,以期《实变函数与泛函分析》及同类证明型数学课程的智能化教学改革提供参考。

【关键词】人工智能;实变函数与泛函分析;控制收敛定理;Hahn–Banach 定理;教学模式构建;混合式教学

【基金项目】广东省教改项目和华南农业大学教改项目:人工智能在数学教学辅助中的应用与探索——以数学专业核心课程《实变函数与泛函分析》为例

【收稿日期】2026 年 5 月 15 日

【出刊日期】2026 年 6 月 17 日

【DOI】10.12208/j.ije.20260070

A study on the teaching reform model of AI-assisted *Real Analysis and Functional Analysis*: Taking the dominated convergence theorem and the Hahn–Banach theorem as examples

Haichou Li, Xueqin Wang

Department of Mathematics, College of Mathematics and Informatics, South China Agricultural University,
Guangzhou, Guangdong

【Abstract】 With the development of generative artificial intelligence (AI), smart teaching platforms, and classroom interaction tools, new technical support has become available for the teaching reform of advanced theoretical mathematics courses. *Real Analysis and Functional Analysis* is a typical proof-based advanced mathematics course. In its teaching process, students often face difficulties such as understanding abstract concepts, distinguishing theorem conditions, grasping complex proof structures, and receiving insufficient personalized learning support. In response to these teaching challenges, this paper follows the basic principle of “teacher guidance, student-centered learning, platform support, and AI assistance,” and constructs an integrated “pre-class, in-class, and post-class” teaching model supported by the collaboration of Zhihuishu, Rain Classroom, and AI large models. Taking the Dominated Convergence Theorem and the Hahn–Banach Theorem as representative cases, this paper demonstrates the application of the proposed model in condition-discrimination teaching and abstract-proof teaching, aiming to provide a reference for the intelligent teaching reform of Real Analysis and Functional Analysis and similar proof-based mathematics courses.

【Keywords】 Artificial intelligence; Real analysis and functional analysis; Dominated convergence theorem; Hahn–Banach theorem; Teaching model construction; Blended teaching

1 引言

随着生成式人工智能(AI)和智慧教学平台的发展,高等教育教学方式正在发生深刻变化。联合国教科文组织和 OECD 的相关报告指出,人工智能在学习支持、教学资源生成、课堂反馈和个性化辅导等方面具有重

要潜力^[1]。近年来,关于 AI 在高等教育中应用的研究不断增多,相关综述表明,AI 工具能够为课程教学提供新的支持,但也伴随内容准确性、学术诚信和学生依赖等问题^[2]。因此,在数学课程教学中,如何将 AI 工具与课程内容、教学目标和学生认知规律相结合,已成

为值得关注的新问题。

《实变函数与泛函分析》是大学本科数学类专业的重要核心课程, 涵盖测度、Lebesgue 积分、赋范空间、线性算子和对偶空间等内容^[3]。该课程是培养学生抽象思维、逻辑推理和证明能力的重要课程, 也是典型的证明型高阶数学课程。现有关于以证明为核心的高阶数学课程研究表明, 学生在学习此类课程时, 常常不是简单地“不会记定理”, 而是难以理解证明意图、把握证明结构和辨析定理条件^[4]。

国内已有研究从实变函数的混合式教学、翻转课堂、过程性评价以及泛函分析探究式教学等方面进行了探索^[5-8], 大学数学混合式教学研究也表明, 智慧教学平台能够在资源发布、课堂互动、学习记录和反馈诊断等方面提供支持^[9]。这些研究为本文提供了重要参考, 但总体上仍较多聚焦教学组织方式或平台应用本身。对于此类证明型高阶数学课程而言, 教学改革的关键不只是实现线上线下结合, 更在于围绕抽象概念理解、定理条件辨析和证明结构把握提供更有针对性的认知支持。

基于此, 本文在已有混合式教学和智慧教学平台研究基础上, 进一步引入 AI 大模型, 构建“智慧树—雨课堂—AI 大模型”协同支持的课程教学模式。该模式以“课前—课中—课后”一体化教学流程为主线: 课前依托智慧树平台开展导学资源发布和问题生成, 课中借助雨课堂开展即时诊断和重点突破, 课后结合 AI 大模型开展概念追问、正反例辅助、证明框架和个性化答疑。本文选取控制收敛定理和 Hahn-Banach 定理作为典型案例, 分别对应条件辨析型和抽象证明型, 探索人工智能辅助证明型高阶数学课程教学的具体路径。

2 课程教学痛点

在前文研究背景分析的基础上, 为进一步明确教学模式构建的现实依据, 本文从概念理解、条件辨析、证明结构和学习反馈四个方面, 对《实变函数与泛函分析》课程的教学痛点作具体梳理。

第一, 概念抽象, 学生理解门槛较高。诸如“几乎处处收敛、依测度收敛、可积控制函数、线性泛函延拓、对偶空间”等概念, 往往难以借助直观图像直接理解, 学生容易停留在定义记忆层面。第二, 定理条件复杂, 学生条件辨析能力不足。例如, 在控制收敛定理中, 学生容易混淆逐点收敛、一致有界和可积控制; 在 Hahn-Banach 定理中, 学生常不易理解次线性泛函、范数控制和延拓存在性之间的关系。第三, 证明过程层次较多,

学生难以把握整体结构。对于证明型课程而言, 学生常出现“局部步骤似乎看懂, 但整体证明思路不清”的问题。第四, 传统课堂反馈相对滞后, 教师难以及时掌握学生在预习、课堂理解和课后复习中的具体困难。

因此, 该课程教学改革不宜仅依赖增加习题或延长讲授时间, 而应围绕“概念理解—条件辨析—证明结构—学习反馈”进行系统设计。

3 “智慧树—雨课堂—AI 大模型”协同教学模式

本文提出的教学模式遵循“教师主导、学生主体、平台支撑、AI 辅助”的基本理念。教师负责教学目标设定、知识逻辑组织、证明严谨性把关和学习评价设计; 学生在预习、提问、判断、证明和反思中主动建构知识; 智慧树和雨课堂提供过程支持; AI 大模型则作为概念解释、条件辨析、正反例生成、证明框架和个性化答疑的辅助工具。

这一设计的重点, 是把学生的课前预习、课堂理解和课后整理连接起来, 避免学习过程停留在“上课听讲—课后做题”的单一模式。课前, 教师依托智慧树平台发布微课、知识导图和预习问题, 引导学生形成初步问题意识, 并允许学生在教师给定的问题框架下借助 AI 进行概念追问和问题生成; 课中, 教师利用雨课堂设置判断题、选择题和课堂投票, 及时诊断学生在概念、条件和证明步骤上的误区, 并结合 AI 辅助生成的正反例、课堂讨论题和证明路线图进行重点突破; 课后, 学生通过智慧树完成分层作业和学习反思, 并对 AI 输出进行核查、修正和再整理。教师则结合平台数据、课堂反馈和学生反思改进后续教学。

对证明型数学课程而言, AI 最适合承担提示、追问和辅助整理的角色, 不宜直接替代教师的严谨讲解和学生的独立证明。

4 典型教学案例设计

4.1 控制收敛定理: 条件辨析型内容设计

控制收敛定理是实变函数中的核心定理, 集中体现函数列收敛、可积控制和极限与积分交换之间的关系。在传统教学中, 学生常把该定理简单理解为“极限与积分可以交换”, 而忽视其条件结构。针对这一问题, 可将教学重点放在“条件为什么需要”和“缺少条件会怎样”两个方面。

课前, 教师通过智慧树发布导学问题: 为什么逐点收敛不能保证积分极限交换? 什么是可积控制函数? 控制收敛定理与单调收敛定理、Fatou 引理有何区别? 学生可借助 AI 进行初步追问, 但需整理为自己的预习笔记。课中, 教师利用雨课堂设置判断题, 如“若

$f_n \rightarrow f$ 几乎处处收敛, 则一定有 $\int f_n \rightarrow \int f$: “若 $|f_n| \leq M$, 其中 M 为常数, 则一定可用控制收敛定理”。通过答题结果发现学生是否混淆“一致有界”和“可积控制”。随后, 教师结合反例进行说明, 如在 $\mathbb{R}$ 上令 $f_n = 1_{[n, n+1]}$, 则 $f_n \rightarrow 0$ 逐点成立, 但 $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$, 从而说明仅有逐点收敛不够。课后, 可布置分层任务: 基础层要求判断函数列是否满足定理条件; 提高层要求构造反例; 拓展层要求比较控制收敛定理、单调收敛定理与 Fatou 引理的适用范围。

4.2 Hahn-Banach 定理: 抽象证明型内容设计

Hahn-Banach 定理是泛函分析中的基础性定理, 涉及线性泛函延拓、范数控制和对偶空间等重要思想^[8-9]。其教学难点不只是定理表述抽象, 更在于学生难以理解“延拓”的意义和证明结构。对此, 教学设计应突出“直观引入—思想解释—证明分层”。

课前, 教师发布问题: 什么是线性泛函? 什么是从子空间到全空间的延拓? 为什么延拓时要保持某种控制? 学生可借助 AI 获取初步解释, 并提交最困惑的问题。课中, 教师先用低维例子引入: 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 设 $M = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, 在 M 上定义 $f(x, 0) = x$, 讨论它能否延拓到整 $\mathbb{R}^2$, 延拓是否唯一, 如何保持范数不减。由此引出 Hahn-Banach 定理的核心不是求唯一解, 而是在控制条件下保证延拓存在。随后, 教师将证明分为“目标—控制条件—延拓步骤—存在性结论”几个层次, 帮助学生先把握结构, 再进入严谨证明。课后, 可要求学生用自己的语言解释 Hahn-Banach 定理, 并绘制其与对偶空间、分离定理等内容的联系图。

5 预期成效、评价方案与实施边界

从课程设计看, 这一模式首先有助于让学生带着问题进入课堂; 其次, 雨课堂反馈可以帮助教师及时发现学生对条件和证明步骤的误解; 再次, AI 的追问和例反例提示可作为课后理解的补充支架。

后续实施时, 可从过程性、结果性和反思性三个维度评价: 过程性指标包括资源观看率、预习任务完成率和课堂参与率; 结果性指标包括概念解释题、条件辨析题和证明结构题完成质量; 反思性指标包括学生反思、AI 使用记录和问卷反馈。

同时, AI 使用必须有明确边界: 可以辅助解释概念、生成例反例和提示证明思路, 但不能替代教材、教师把关和学生独立证明。对于证明型数学课程而言, AI 应定位为“辅助理解”和“启发追问”, 而不是“代替思考”。

6 小结

本文针对《实变函数与泛函分析》课程中概念抽象、条件复杂、证明困难和反馈滞后等问题, 构建了“智慧树—雨课堂—AI 大模型”协同支持的教学模式, 并以控制收敛定理和 Hahn-Banach 定理为例设计了具体教学路径。本文认为, 人工智能辅助高阶数学课程教学的关键, 不在于简单增加技术工具, 而在于围绕课程认知困难重构学习支持过程。未来将在具体教学实践中进一步检验该模式的有效性, 并不断完善评价体系和 AI 使用规范。

参考文献

- [1] UNESCO. Guidance for Generative AI in Education and Research [R]. Paris: UNESCO, 2023.
- [2] Batista J, Mesquita A, Carnaz G. Generative AI and higher education: Trends, challenges, and future directions from a systematic literature review[J]. Information, 2024, 15(11): 676.
- [3] 程其襄, 张奠宙, 胡善文, 薛以锋. 实变函数与泛函分析基础[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [4] Stylianides G J, Stylianides A J, Moutsios-Rentzos A. Proof and proving in school and university mathematics education research: A systematic review[J]. ZDM—Mathematics Education, 2024, 56: 47-59.
- [5] 刘亚萍, 孙文婕. “实变函数”混合式教学模式探究[J]. 科技风, 2025(19): 43-45.
- [6] 李雪华, 李泓岸. “实变函数”课程混合式教学模式的探索与实践[J]. 教育教学论坛, 2022(12): 100-103.
- [7] 范晓宇, 任咏红. 混合式教学模式在大学数学教学中的探索与实践——以《实变函数》课程为例[J]. 创新教育研究, 2022, 10(1): 42-48.
- [8] 赵连阔, 冯丽霞. 探究式教学法在《泛函分析》课程教学中的应用与实践[J]. 高教学刊, 2025(4): 10-13.
- [9] 姜惠敏, 邢百萍, 姜兆波. 基于双平台的“线上 + 线下”混合教学模式的实践研究——以文科数学《微积分》为例[J]. 教育进展, 2024, 14(5): 1502-1511.

版权声明: ©2026 作者与开放获取期刊研究中心 (OAJRC) 所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS