

“换”然一新：换元法解条件最值问题

闫梓旭

扬州大学 江苏扬州

【摘要】换元法是中学数学中用以简化问题结构、转化未知形式的核心思想方法。本文以 2022 年全国新高考Ⅱ卷第 12 题为研究载体，详细阐述了目标换元、和差换元、三角换元、比值换元、均值换元等多种换元技巧在求解二元二次约束条件下最值问题中的具体应用，完整推导出本题的结论，选项 B、D 正确。通过一题多解的方式，对比各类换元法适用条件：目标换元求解线性目标，三角换元适配可配方平方和约束，和差换元简化对称方程，比值换元处理齐次条件，均值换元依赖恒等变形降元，揭示了换元法“化繁为简、聚焦本质”的核心价值；同时进一步追溯题源、引申推广，并结合教学实践提出了相应的思考，为高中数学教学提供参考与借鉴。

【关键词】换元法；一题多解；条件最值问题；高考真题

【收稿日期】2026 年 3 月 14 日 **【出刊日期】**2026 年 4 月 18 日 **【DOI】**10.12208/j.aam.20260009

A substitution-based perspective: Solving constrained extremum problems through variable transformation

Zixu Yan

Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu

【Abstract】The substitution method serves as a core ideological approach in middle school mathematics to simplify problem structures and transform unknown forms. Taking the 12th question of the 2022 National New College Entrance Examination Volume II as the research carrier, this paper elaborates on the specific applications of various substitution techniques—including target substitution, sum-difference substitution, trigonometric substitution, ratio substitution, and mean value substitution—in solving maximum and minimum value problems under binary quadratic constraint conditions, and fully deduces the conclusions of the question, verifying that Options B and D are correct. Through multi-solution analysis of a single problem, this paper compares the applicable conditions of different substitution methods: target substitution is suitable for solving linear objectives, trigonometric substitution adapts to constrained conditions of configurable sum of squares, sum-difference substitution simplifies symmetric equations, ratio substitution addresses homogeneous conditions, and mean value substitution realizes dimension reduction via identical deformation. It reveals the core value of the substitution method in “simplifying complexity and focusing on essence”. Furthermore, this paper traces the problem source, extends and generalizes the relevant conclusions, and puts forward corresponding reflections combined with teaching practice, providing references for senior high school mathematics teaching.

【Keywords】Variable substitution; Multiple solutions to one problem; Const-rained extremum problems; Gaokao mathematics problems.

1 引言

换元法（substitution method）是数学解题中一种基本且重要的转化策略，其核心思想是通过引入新的变量替代原有表达式中的部分结构，把复杂问题转化为简单问题、隐含关系转化为显性关系。在高中数学中，换元法的应用极为广泛，常见的形式包括局部换元（Partial Substitution）、和差换元（Sum-Difference Substitution）、三角换元（Trigono-metric Substitution）、比值换元（Ratio Substitution）以及均值换元（Mean

Value Substitution) 等。这些形式各有侧重, 适合解决不同类型的数学问题。基于此, 本文将以 2022 年新高考 II 卷的第 12 题为例, 探究换元法下的多种解题方法, 并进一步挖掘其数学价值与教学启示。

2 试题再现

题目 (2022 年全国新高考数学 II 卷第 12 题, 多项选择题)

若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 则

A. $x + y < 1$

B. $x + y > -2$

C. $x^2 + y^2 \geq 1$

D. $x^2 + y^2 \leq 2$

本题以二元二次方程 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 为约束条件, 要求判断这四个涉及 $x + y$ 与 $x^2 + y^2$ 的不等式是否恒成立, 也就是说要求解出其取值范围, 依据范围进行判断。观察可知, 该方程结构简洁, 却兼具代数与几何双重内涵。从代数角度看, 它是关于 x, y 的二次齐次方程, 适合通过换元或判别式处理; 从几何角度看, 它表示一个中心在原点、旋转了 45° 的椭圆, 为理解目标函数的取值范围提供了几何直观。四个选项分别考查了线性表达式与二次表达式在给定约束下的最值情况, 覆盖了条件最值问题的常见考查方向, 在换元法下有多种解题方法。

3 解法分析

从题目结构可以看出, 本题以二元二次方程为约束条件, 将线性表达式 $x + y$ 与二次表达式 $x^2 + y^2$ 的取值范围判断放在一起, 既保持了条件最值问题的典型结构, 也为不同数学方法的综合运用提供了良好载体。若从不同的换元角度出发, 选择不同的代换变量, 则可衍生出多条逻辑独立而又相互印证的解题思路。这些思路分别借助判别式法、对称变换、三角函数、不等式放缩等数学工具, 从不同侧面揭示同一问题的代数本质和几何背景, 充分体现了换元法在简化复杂关系、降低思维难度的价值和意义。

3.1 $x + y$ 取值范围的求解

下面分别从局部换元、和差换元、三角换元、比值换元和均值换元五个方向展开, 展示不同代换视角下对同一问题的求解思路。

解法 1 (局部换元法) 设 $t = x + y$, 代入约束条件转化为关于 x 的一元二次方程, 利用判别式非负得到 t 的范围。

则 $y = t - x$, 将其代入 $x^2 + y^2 - xy = 1$:

$$\begin{aligned} x^2 + (t - x)^2 - x(t - x) &= 1 \\ x^2 + t^2 - 2tx + x^2 - tx + x^2 &= 1 \\ 3x^2 - 3tx + t^2 &= 1 \end{aligned}$$

整理得 $3x^2 - 3tx + (t^2 - 1) = 0$ 。

由于关于 x 的二次方程有实数解, 因此判别式须非负: $\Delta = (-3t)^2 - 4 \times 3 \times (t^2 - 1) = 9t^2 - 12t^2 + 12 = -3t^2 + 12 \geq 0$ 解得 $t^2 \leq 4$, 即 $-2 \leq t \leq 2$ 。因此 $-2 \leq x + y \leq 2$, A 选项错误, B 选项正确。

评析: 这种方法是求解线性表达式在二次约束下的取值范围问题的常用方法, 体现了化二元为一元的思想, 思路自然, 计算简洁。

解法 2 (和差换元法) 在数学中, 对称性通常指交换两个变量后表达式不变的性质, 而这里的 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 将 x, y 交换后得到 $y^2 + x^2 - yx = 1$, 两者完全一样, 所以该方程关于 x 和 y 是对称的。

因此, 可利用对称性, 设 $x = m + n$, $y = m - n$, 代入方程, 消去交叉项。

$$\begin{aligned} (m + n)^2 + (m - n)^2 - (m + n)(m - n) &= 1 \\ (m^2 + 2mn + n^2) + (m^2 - 2mn + n^2) - m^2 + n^2 &= 1 \\ 2m^2 + 2n^2 - m^2 + n^2 &= m^2 + 3n^2 = 1 \end{aligned}$$

易知 $x + y = (m + n) + (m - n) = 2m$,

又由 $m^2 = 1 - 3n^2 \leq 1$ ，解得 $-1 \leq m \leq 1$ ，所以 $-2 \leq x + y \leq 2$ 。

评析：该解法通过和差换元 $x = m + n$ 、 $y = m - n$ ，直接消去了原方程中的交叉项 xy ，使约束条件化为 $m^2 + 3n^2 = 1$ ，从而 $x + y = 2m$ 的取值范围一目了然，体现出对称性带来的便利。

解法 3（三角换元法）将方程 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 通过配方写成平方和形式，然后引入三角参数表示 x 与 y ，从而将 $x + y$ 表达为 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 的线性组合，最后利用三角函数的有界性确定取值范围。

$$x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$$

令 $X = x - \frac{y}{2}$ ， $Y = \frac{\sqrt{3}}{2}y$ ，则 $X^2 + Y^2 = 1$ 。设 $X = \cos\theta$ ， $Y = \sin\theta$ ，则

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta, \quad x = X + \frac{y}{2} = \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$$

于是

$$\begin{aligned} x + y &= \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta \\ x + y &= 2\sin(\theta + \varphi) \end{aligned}$$

其中 $\varphi = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$ ，故 $x + y \in [-2, 2]$ 。

评析：三角换元的关键在于将代数方程转化为圆的参数方程。配方法能将原方程改写为一个单位圆的形式 $(x - \frac{y}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2 = 1$ ，从而引入角度 θ 。

随后将 $x + y$ 化为 $2\sin(\theta + 30^\circ)$ ，其值域直接由正弦函数的有界性得到。这种解法沟通了代数与三角知识，考验学生从方程结构识别三角换元法解题的能力。

解法 4（比值换元法）齐次式指多项式中各项次数相等，二次齐次方程即所有项均为二次项（如 x^2 、 xy 、 y^2 的组合），其特点是方程两边同除以某一变量的平方后可降为单变量问题。由于 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 是二次齐次式，故当 $x \neq 0$ 时可两边

同除以 x^2 ，引入新变量 $k = \frac{y}{x}$ ，将方程转化为关于 k 的表达式，进而用 k 表示 x 和 $x + y$ 。最后通过分析分式函数的值域得到 $x + y$ 的范围，并单独验证 $x = 0$ 的情形。

①当 $x \neq 0$ 时，设 $y = kx$ ，代入式子得：

$$x^2 + k^2x^2 - kx^2 = x^2(1 + k^2 - k) = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{1 + k^2 - k}$$

则 $x + y = x(1 + k)$ ， $(x + y)^2 = \frac{(1 + k)^2}{1 + k^2 - k}$ 。令 $t = 1 + k$ ，则 $k = t - 1$ ，代入分母，则 $1 + (t - 1)^2 - (t - 1) = 1 + t^2 - 2t + 1 - t + 1 = t^2 - 3t + 3$ 。

故 $(x + y)^2 = \frac{t^2}{t^2 - 3t + 3}$ ，设 $u = \frac{t^2}{t^2 - 3t + 3}$ ，整理得 $(u - 1)t^2 + 3ut - 3u = 0$ 。当 $u \neq 1$ 时，判别式 $\Delta = 9u^2 - 12u(u - 1) = -3u^2 + 12u \geq 0$ ，得 $0 \leq u \leq 4$ 。当 $u = 1$ 时，方程化为 $-3t + 3 = 0$ ，有解 $t = 1$ ，故 $u = 1$ 可取。因此 $0 \leq u \leq 4$ ，即 $-2 \leq x + y \leq 2$ 。

②当 $x = 0$ 时，代入条件得 $y^2 = 1$ ，则 $x + y = \pm 1$ ，也在上述范围内。

综上所述， $-2 \leq x + y \leq 2$ 。

评析：比值换元法的优势在于将两个变量缩减为一个参数，从而将条件最值问题转化为单变量函数的值

域问题。该方法可用于处理一类具有齐次结构的约束问题，但需要特别注意的是，当分母可能为零时应进行分类讨论，以保证解答的完整性。

解法 5（均值换元法）将 $x^2 + y^2$ 单独表示成 $1 + xy$ ，然后利用基本不等式 $x^2 + y^2 \geq 2xy$ 和 $x^2 + y^2 \geq -2xy$ 分别得到关于 xy 的两个不等式，联立解出 xy 的取值范围。最后通过恒等式 $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 1 + 3xy$ 将目标转化为 xy 的线性函数，从而求出 $(x + y)^2$ 的范围，进而得到 $x + y$ 的取值范围。

首先由题可知 $x^2 + y^2 = 1 + xy$ 。由 $x^2 + y^2 \geq 2xy$ 得 $1 + xy \geq 2xy$ ，即 $xy \leq 1$ 。由 $x^2 + y^2 \geq -2xy$ 得 $1 + xy \geq -2xy$ ，即 $3xy \geq -1$ ， $xy \geq -\frac{1}{3}$ 。于是 $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 1 + xy + 2xy = 1 + 3xy$

代入 xy 的范围： $1 + 3 \cdot (-\frac{1}{3}) \leq (x + y)^2 \leq 1 + 3 \cdot 1$

解得 $0 \leq (x + y)^2 \leq 4$ ，故 $-2 \leq x + y \leq 2$ 。

评析：该方法没有引入额外的参数，计算量小，适合快速判断取值范围；但需要注意不等式的放缩方向应正确无误，并且要验证等号能否成立，以保证解的精确性。该解法尤其适用于那些可以通过代数恒等式将目标转化为中间变量的线性函数的问题，例如本题， $(x + y)^2 = 1 + 3xy$ 将目标与中间变量 xy 线性关联，因此只需需求出 xy 的范围即可直接得到 $x + y$ 的取值范围。

3.2 $x^2 + y^2$ 取值范围的求解

与线性目标 $x + y$ 不同， $x^2 + y^2$ 作为二次表达式，取值范围可以通过约束条件直接转化，也可以借助已经得到的 $x + y$ 范围间接推导。下面从整体换元、和差换元和三角换元三个角度展开求解。

解法 1（整体换元法）将 $x^2 + y^2$ 视为一个整体变量，通过约束条件将其与交叉项 xy 建立等式关系。然后利用平方和 $(x + y)^2$ 与平方差 $(x - y)^2$ 的非负性，构造出关于该整体变量的两个不等式，联立求解其取值范围。

设 $u = x^2 + y^2$ ，则由 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 可得 $xy = u - 1$ 。又由 $(x + y)^2$ 和 $(x - y)^2$ 的非负性可知， $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = u + 2(u - 1) = 3u - 2 \geq 0$ ， $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = u - 2(u - 1) = 2 - u \geq 0$ 。分别解得 $u \geq \frac{2}{3}$ ， $u \leq 2$ ，因此 $\frac{2}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 2$ ，C 选项错误，D 选项正确。

评析：整体换元法与前几种解法的核心区别在于不试图表示 x 或 y ，而是直接利用平方和与平方差的非负性对目标进行约束，无需分类讨论或参数化，这是求解二次表达式取值范围最简便的方法之一。

解法 2（和差换元法）由于约束条件关于 xy 对称，因此依旧可采用和差代换，将交叉项 xy 转化为 $m^2 - n^2$ ，从而使原方程变为不含交叉项的标准椭圆方程。此时 $x^2 + y^2$ 便可由 m, n 表示，再借助代数恒等式变形消去 m^2 ，将目标式写成关于 n^2 的一次函数。通过 n^2 和 m^2 的非负性确定其范围，即可得到 $x^2 + y^2$ 的取值范围。

由 3.1 中的解法 2 可知 $m^2 + 3n^2 = 1$ ，且 $x^2 + y^2 = (m + n)^2 + (m - n)^2 = 2(m^2 + n^2) = 2(1 - 3n^2 + n^2) = 2(1 - 2n^2)$ 。

由 $n^2 \geq 0$ 及 $m^2 = 1 - 3n^2 \geq 0$ ，得 $0 \leq n^2 \leq \frac{1}{3}$ 。

于是 $1 - 2 \cdot \frac{1}{3} \leq 1 - 2n^2 \leq 1$ ，即 $\frac{1}{3} \leq 1 - 2n^2 \leq 1$ ，故 $\frac{2}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 2$ 。

评析：此方法将 $x^2 + y^2$ 直接表示为 n^2 的线性函数，简洁明了，体现了对称换元在化简二次型中的优势。与整体换元法相比，此方法更侧重于先改造约束条件，再代入目标；而整体换元法则直接从目标出发，利用平方和与平方差的不等式进行求解。

解法 3（三角换元法）延续 3.1 解法 3 中的三角参数表示，将 x, y 分别用 θ 表示，直接代入 $x^2 + y^2$ 并展开。通过运用倍角公式、辅助角公式将表达式化简为单一正弦函数的形式，进而利用正弦函数的有界性确定取值范围。

由 3.1 解法 3 有 $x = \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$ ， $y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$ 。

于是

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta)^2 + \frac{4}{3}\sin^2\theta \\&= \cos^2\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{3}\sin^2\theta + \frac{4}{3}\sin^2\theta \\&= \cos^2\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta + \frac{5}{3}\sin^2\theta\end{aligned}$$

利用 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta + \frac{2}{3}\sin^2\theta \\&= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\theta + \frac{1}{3}(1 - \cos 2\theta) \\&= \frac{4}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2\theta - \frac{1}{3}\cos 2\theta \\&= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sin(2\theta - 30^\circ)\end{aligned}$$

故 $\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sin(2\theta - 30^\circ)$ 的值域为 $[\frac{4}{3} - \frac{2}{3}, \frac{4}{3} + \frac{2}{3}]$, 即 $[\frac{2}{3}, 2]$, 故 $\frac{2}{3} \leq x^2 + y^2 \leq 2$ 。

评析：这里的关键在于如何处理 $\sin\theta\cos\theta$ 项与 $\sin^2\theta$ 项，将其合并为一个三角函数的线性组合。与求解 $x+y$ 时的三角换元不同，求解 $x^2 + y^2$ 需要对表达式进行更复杂的三角恒等变形，最终化为 $A + B\sin(2\theta + \varphi)$ 的形式。

该方法将代数条件完全转化为三角函数问题，避免了代数运算中的配方与判别式讨论，对于熟练掌握三角恒等变换的学生而言是一条顺畅的路径。

4 题根探源

4.1 几何背景与代数结构：换元法的内在依据

方程 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 在平面直角坐标系中表示一个中心在原点的椭圆，通过配方法可以将其转化为便于学生理解的平方和形式：

$$x^2 + y^2 - xy = (x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$$

若令 $X = x - \frac{y}{2}$, $Y = \frac{\sqrt{3}}{2}y$, 则上式可化为 $X^2 + Y^2 = 1$, 即一个单位圆。

这说明原方程所描述的椭圆与单位圆之间存在一个线性变换关系： (X, Y) 与 (x, y) 之间由可逆线性变换相联系，即

$$\begin{cases} X = x - \frac{1}{2}y \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

该变换将单位圆映射为椭圆，而这一代数表示也为三角换元提供了直接依据，因为 X, Y 满足单位圆方程，故可设 $X = \cos\theta$, $Y = \sin\theta$, 从而反解出 x, y 关于 θ 的表达式。

从代数结构看，约束条件具有两个重要特征：一是关于 x 与 y 的对称性，二是二次齐次性。这两个特征为换元法提供了直接的代数依据。对称性意味着可以将问题放在和与差的坐标系下考虑，而齐次性则意味着可以将二维问题降为一维，将条件最值问题转化为单变量函数的值域问题。此外，配方法所得到的平方和形式可直接引导出三角换元，将代数约束转化为三角恒等式，利用单位圆的有界性确定取值范围。

4.2 教材溯源与命题立意

这类问题的基本原型在教材中通常表现为：已知点在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上，求 $x+y$ 的取值范围。例如，教材配套练习中常采用令 $x+y=t$, 代入圆的方程，利用判别式求范围的解法。2022 年新高考 II 卷的第 12 题

正是在这一原型的基础上，将单位圆改为含交叉项的椭圆 $x^2 + y^2 - xy = 1$ ，增加了代数变形的难度，但本质上还是给定二次曲线上的点，讨论取值范围。

本题的约束条件既具有对称性，又包含交叉项，且不同换元方式对应不同的观察视角，因此形成了本题一题多解的特点。这类题目要求学生根据表达式结构特点的不同，灵活的选择合适的方法，而非机械套用某一固定方法。而这类切口较小却需要深挖的题目，正是新高考注重数学思维品质的典型体现。

5 结论与引申推广

通过多种换元法的分析，本文对 2022 年新高考Ⅱ卷第 12 题中 $x+y$ 与 x^2+y^2 的取值范围给出了系统解答，得到以下结论：在约束条件 $x^2 + y^2 - xy = 1$ 下， $x+y$ 的取值范围为 $[-2, 2]$ ，因此 A 选项错误，B 选项正确；

$x^2 + y^2$ 的取值范围为 $[\frac{2}{3}, 2]$ ，故 C 选项错误，D 选项正确。

本题使用的换元策略还可以推广到更一般的问题结构。例如，在形如 $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ （其中 $a > 0$ ， $b^2 - 4ac < 0$ ）一般的椭圆约束下，求解 $px + qy$ 的取值范围，仍然可以采用以下两种推广方法：

第一种是目标换元法，设 $px + qy = t$ ，解出 y 或 x 代入约束，得到关于另一变量的一元二次方程，由判别式非负得到 t 满足的不等式，从而解出取值范围。这一方法不依赖于椭圆的具体方向，具有普适性。

若约束条件能够通过配方写成平方和形式，那么也可运用三角换元求解。可以将约束改写为 $(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}y)^2 + (\sqrt{c - \frac{b^2}{4a}}y)^2 = 1$ ，然后设对应的三角函数，目标 $px + qy$ 便可化为 $Asin(\theta + \varphi)$ 的形式，从而得出取值范围。

此外，本题中求解 $x^2 + y^2$ 范围时使用的整体换元法也可以推广到更多类似结构的问题中。例如，对于约束 $x^2 + kxy + y^2 = 1$ （ $|k| < 2$ ），同样可以设 $u = x^2 + y^2$ ，由 $xy = \frac{u-1}{k}$ ，再结合 $(x \pm y)^2 \geq 0$ 得到 u 的不等式组，从而解出范围。

相较于机械记忆几种固定的解法，学生更应该学会根据问题的结构灵活选择合适的换元方法。教师在教学中也应当引导学生尝试改变题目中的系数或目标表达式，自主探究结论会如何变化，从而加深对换元法本质的理解。

6 教学思考

换元法在中学数学中占有重要地位，但学生往往只把它当作一种计算技巧，而忽视了它背后的思想价值。应帮助学生学会在同样一个约束条件下，尝试不同的换元方式，通过改变观察角度，使隐藏的结构显现，使复杂的关系简化。

而这道题就为换元法的教学提供了一个很好的参考案例。课堂上，教师可以先让学生自己尝试，再引导他们总结出每种换元适用于什么情形，引导学生体会换元的关键在于选择与问题本质相匹配的替换形式。例如，目标换元最直接，但计算量稍大；和差换元利用了对称性，过程更加简洁；三角换元则沟通了代数与几何，有利于培养整体观念。

综合来看，五种换元法各有其适用场景：目标换元法适用于线性目标函数，核心在于设线性表达式为新变量后化二元为一元，优点是思路自然、普适性强，但计算量略大，建议面向全体学生优先讲授；和差换元法适用于约束条件具有对称性的问题，可消去交叉项简化运算，但对称性并非所有题目都具备；三角换元法适用于可配方为标准椭圆或圆的约束条件，能沟通代数与几何，但对三角恒等变形要求较高，适合学有余力的学生；比值换元法适用于齐次方程，但需注意分母为零的分类讨论；均值换元法则需依赖代数恒等式将目标转化为中间变量的线性函数，变形技巧性较强。

从实际教学来看，学生首先最容易接受的是目标换元法与和差换元法，其次是三角换元。这种方法较为直观，但需要学生熟练掌握配方和三角恒等变形，因此更适合作为拓展内容。比值换元和均值换元则对代数变形能力要求较高，可以在练习中逐步渗透。因此，教师可以对不同水平的学生进行针对性教学。对于基础

较弱的学生，可优先掌握目标换元法和和差换元法，这两种方法思路直接，易于操作；对于中等学生，可引导尝试均值换元法；对于学有余力的学生，鼓励尝试三角换元法和比值换元法，培养高阶思维。教师不要求学生掌握所有方法，但应鼓励他们至少尝试两种以上，在比较中体会换元的本质。

换元法的教学要让学生在比较中感悟不同方法的适用场景和特点，一道好的题目也不能只满足于得到答案，而应当成为培养学生数学思维、方法迁移能力的载体。换元法作为中学数学的核心方法之一，值得在教学中反复渗透、层层深化，教师应有意识的引导学生观察问题的结构特征，比如，方程是否对称、是否齐次、能否配方等等，这些观察都是选择换元方法的依据。当学生不再依赖“这道题该用什么方法”的固定记忆，而是学会自己分析、自己选择时，换元法的教学才算真正到位。

参考文献

- [1] 那鸣镝,濮安山.运用换元法巧解高考数学题例析[J].上海中学数学,2017,(10):21-22.
- [2] 蔡俊剑.例析均值换元法解数学竞赛最值问题[J].中学数学研究,2020,(11):63-64.
- [3] 刘凌骁.双变量换元法求解一类二元条件最值问题[J].中学生数理化(学习研究),2019,(6):38.
- [4] 刘海燕.换元法在二元条件最值问题中的应用[J].中学数学,2026,(7):124-125.
- [5] 任重泽.运用换元法巧解高考数学题[J].高考,2018,(8):79.
- [6] 刘延群.高中数学换元解题“六法”[J].中学数学,2022,(9):81-82+95.
- [7] 战景林.巧用三角换元法求解一类二元最值问题分析[J].理科爱好者,2024,(1):31-33.
- [8] 郭兴甫.巧用三角换元法求解一类二元最值问题[J].高中数学教与学,2023,(19):11-14.

版权声明：©2026 作者与开放获取期刊研究中心(OAJRC)所有。本文章按照知识共享署名许可条款发表。

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



OPEN ACCESS