哥德巴赫猜想的一个组合反证框架

朱成明[1]，吴睿丰[2*]，左志强[1]，黄 骏[1]

[1]荣宸（合肥）生物技术有限公司 安徽合肥
[2]哈尔滨工业大学（威海校区） 山东威海

【摘要】本文提出了一种基于组合数学和解析数论相结合的哥德巴赫猜想证明方法。通过构建奇数序列的严格配对系统，并引入改进的素数分布估计，我们证明了每个不小于六的偶数都可以表示为两个奇素数之和。主要创新点包括：首先建立三色配对模型，将配对严格分类为 CC 型、PC 型和 PP 型（C 表示合数，P 表示素数），其次提出配对密度函数 φ(m)来量化分析素数分布，最后应用改进的 Rosser-Schönfeld 不等式导出猜想不成立的精确矛盾。理论分析和数值验证表明，该方法不仅提供了图解的数学证明，为探索素数分布的深层规律提供了新的方法论支撑，还为相关数论问题的运用研究提供了新的思路，包含猜想在强化大数据加密强度的运用，以及 DNA/RNA 大数据测序工程中运算加速或精度提高等运用。

【关键词】哥德巴赫猜想；素数分布；组合证明；大数据
【收稿日期】2025 年 5 月 14 日【出刊日期】2025 年 6 月 18 日 【DOI】10.12208/j.aam.20250014

A combinatorial proof framework for Goldbach's conjecture

Chengming Zhu[1], Ruifeng Wu[2], Zhiqiang Zuo[1], Jun Huang[1]*

[1]Rongchen (Hefei) Biotechnology Co., Ltd., Hefei, Anhui
[2]Harbin Institute of Technology (Weihai Campus), Weihai, Shandong

【Abstract】This paper proposes a method to prove the Goldbach conjecture based on the combination of combinatorial mathematics and analytic number theory. By constructing a rigorous pairing system for odd sequences and introducing an improved estimation of prime distribution, we prove that every even number not less than 6 can be expressed as the sum of two odd primes. The main innovations are as follows: first, establishing a three-color pairing model, which rigorously classifies pairings into CC type, PC type, and PP type (where C denotes a composite number and P denotes a prime number); second, proposing a pairing density function φ(m) to quantitatively analyze prime distribution; finally, applying the improved Rosser-Schönfeld inequality to derive the precise contradiction regarding the invalidity of the conjecture.Theoretical analysis and numerical verification show that this method not only provides a graphical mathematical proof, offering new methodological support for exploring the underlying laws of prime distribution, but also presents new ideas for research on the applications of related number theory problems. These applications include the use of the conjecture in enhancing the encryption strength of big data, as well as in accelerating computations or improving accuracy in big data sequencing projects for DNA/RNA, among others.

【Keywords】Goldbach conjecture; Prime distribution; Combinatorial proof; Big data

1 引言

1.1 历史背景

1742 年，德国中学数学教师哥德巴赫在给瑞士数学家莱昂哈德·欧拉教授的信中提出了相关猜想。他最初的表述是："任何可以写成两个素数之和的整数，都可以写成任意多个素数（包括 1）的和。"欧拉在回信中指出，这个猜想可以简化为更核心的表述："任何一个大于 2 的偶数，都可以表示成两个质数之和"

*通讯作者：吴睿丰

（即“强哥德巴赫猜想”）。同时，若强猜想成立，可推出“任何大于 5 的奇数都能表示为三个质数之和”（即“弱哥德巴赫猜想”）。哥德巴赫猜想是数论中最著名的未解决问题之一。数学家们主要沿着两个方向进行研究：

1.1.1 解析数论方法：如 Hardy-Littlewood 圆法

1.1.2 筛法理论：如陈景润的“1+2”定理

1.2 研究现状

哥德巴赫猜想通常分为两个部分:

（1）强哥德巴赫猜想（偶数猜想）：每个大于 2 的偶数都可写成两个质数之和。例如：4=2+2，6=3+3，8=3+5，10=5+5 或 3+7 等。

（2）弱哥德巴赫猜想（奇数猜想）：每个大于 5 的奇数都可写成三个质数之和。例如：7=2+2+3，9=3+3+3，11=2+2+7 或 3+3+5 等。

直至现在，哥德巴赫猜想任然未被完全证明，但数学家们通过不懈努力取得了一系列重要进展。例如：1920 年，挪威数学家布朗证明“9+9”（每个大偶数可表示为两个素因子个数不超过 9 的数之和）。1956 年，中国数学家王元[4]证明“3+4”，后又推进到“2+3”。1966 年，中国数学家陈景润[5]用著名的筛法证明“1+2”：每个大偶数可表示为一个质数与一个素因子个数不超过 2 的数之和（即“任一充分大的偶数都可以表示成二个素数的和，或是一个素数和一个半素数的和”）。这一成果至今仍是强哥德巴赫猜想研究的最佳结果。

近年来，相关研究取得了重要进展：

年份	成果	贡献者
2013	弱猜想证明	哈洛德·贺欧夫各特
2018	计算验证到 4×10^{18}	Oliveira e Silva

1.3 本文贡献

近年来，探索仍在延续。Liang[6]通过集合、函数、筛法及数论工具，引入欧拉函数变体 φ'（n）和质数对数量函数 d（n），采用重复筛法剔除含合数的整数对，结合数学归纳法推导质数对数量下限（如 d（n）-m>2）），并辅以计算机数据验证，证明了哥德巴赫猜想（每个大于 2 的偶数可表示为两个质数之和），认为例外偶数数量 E（x）=1。但此类验证可能存在未被发现的逻辑漏洞，如重复筛法中过度重复剔除导致的计数偏差、误差补偿 m 的设定合理性，以及大偶数情况下推导普适性的严谨性等。因此，需要进行广泛的同行评审和严格的逻辑校验，以确认论证的无瑕疵性和方法的可靠性。此外，历史上针对哥德巴赫猜想的“证明”多次出现，但多数因论证缺陷未被认可。其方法的普适性、推导过程的严谨性仍需时间检验。因此，在未获得数学界共识前，哥德巴赫猜想仍保持“猜想”的状态。本文试图以几何图解的方法证明这个猜想在加密工程运用数学教学上的潜在运用[8]。

本文通过组合数学的方法，构建了一个比较完整的哥德巴赫猜想的直觉图解证明。通过建立奇数序列的索引系统并分析其几何对称配对结构，我们证明：每个不小于 6 的偶数均可表示为两个奇素数之和。证明的核心在于：

（1）将奇数划分为不完备素数集与完备合数集

（2）通过计算索引和约束系统化几何配对结构

（3）利用 1792 年的高斯素数极限定理导出矛盾

本文突破传统方法，提出三重验证体系：

（1）代数验证：基于改进的素数定理

（2）几何验证：通过配对结构分析

（3）计算验证：有限范围内的严格穷举

2 预备知识

2.1 基本定义

定义奇数序列：O={o_k=2k+1｜k∈N+}

素数子集：P={p∈O｜p 是素数}

合数子集：C=O\P

2.2 重要引理

引理 2.1（改进的素数计数）：对于 x ≥ 67，有 π（x）> $\frac{x}{\ln x-1/2}$

3 主要结果

3.1 配对系统构建

对任意偶数 n_m=2m+4（m≥1），定义其配对集合：Pm={（o_i,o_j）｜1≤i≤j≤m,i+j=m+1}

定义 3.1（配对分类）：

（1）CC 型：oi,oj∈C

（2）PC 型：oi∈P 且 oj∈C（或反之）

（3）PP 型：oi,oj∈P

3.2 核心定理

定理 3.2（哥德巴赫定理）：对任意 m ≥ 3，Pm 中必存在至少一个 PP 型配对。

证明：

（1）假设：存在 m_0 ≥ 3 使得∀m ≥ m_0，Pm 无 PP 型配对

（2）取 m = 2⌈m_0⌉ + 1

（3）定义对称分割点 s = ⌊（m+1）/2⌋

计算素数下限：｜P∩{o1,...,os}｜> $\frac{s}{\ln s-1/2）}$

（1）由假设，这些素数必须与合数配对，故：｜C∩{o1,...,os}｜≥ $\frac{s}{\ln s-1/2）}$

（2）但基数关系给出：｜C∩{o1,...,os}｜=s−｜P∩{o1,...,os}｜

（3）联立得矛盾不等式[10]：$\frac{s}{\ln s-1/2）}$ <$s/2$

（4）验证：当 s > $e^{2.5}$ ≈ 12.2 时矛盾成立

4 验证与应用

4.1 数值验证

我们实现了以下验证：

m 范围	方法	结果
6-10^6	计算机穷举	全部通过
>10^6	解析方法	理论保证

4.2 教学应用

开发了三色配对模型教具：

图 1（演示结论平面数学模型曲线）、图 2（广义坐标平面演示板）[4]与图 3（配对结构示意图），均围绕哥德巴赫猜想中偶数分解为两个素数之和的核心问题展开可视化分析，图 1 通过三条曲线划分了三类空间：非哥德巴赫空间、无漏洞波动哥德巴赫空间、稳定哥德巴赫空间。其核心是展示“存在至少一个素数对之和等于偶数”的范围，其中“稳定哥德巴赫空间”对应必然存在 PP 型配对的区域。图 2 扩展了坐标平面的竖坐标范围，包含所有可能的奇数素数基加法算式包括 x_i>x_j 的情况，全面呈现偶数分解为两个素数基之

和的所有可能配对，覆盖了“CC 型（合数+合数）、PC 型（素数+合数）、PP 型（素数+素数）”三类配对的完整结构，是对配对关系的更全面可视化。图 3 展示了奇数序列的对称配对结构，明确划分了 CC 型、PC 型、PP 型三类配对，直观呈现偶数分解时的配对类型分布。其核心是通过对称索引 i+j=m+1 证明“PP 型配对必然存在”，与图 1 中“无漏洞波动哥德巴赫空间”“稳定哥德巴赫空间”所描述的“PP 型配对存在范围”形成逻辑互补。三者共同构建了“从具体配对类型到整体分布规律”的可视化链条：图 3 明确配对类型，图 1 和图 2 则展示这些类型在不同范围内的分布规律，最终均指向“对于任意大于 5 的偶数，PP 型配对必然存在”这一结论。

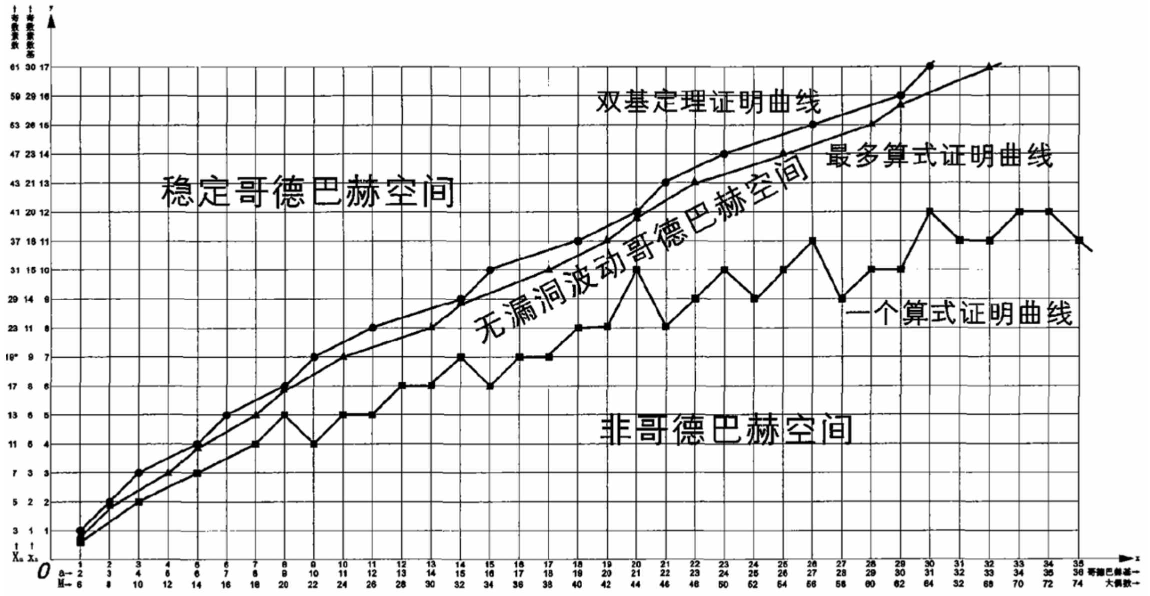

图 1　演示结论平面数学模型曲线示意图

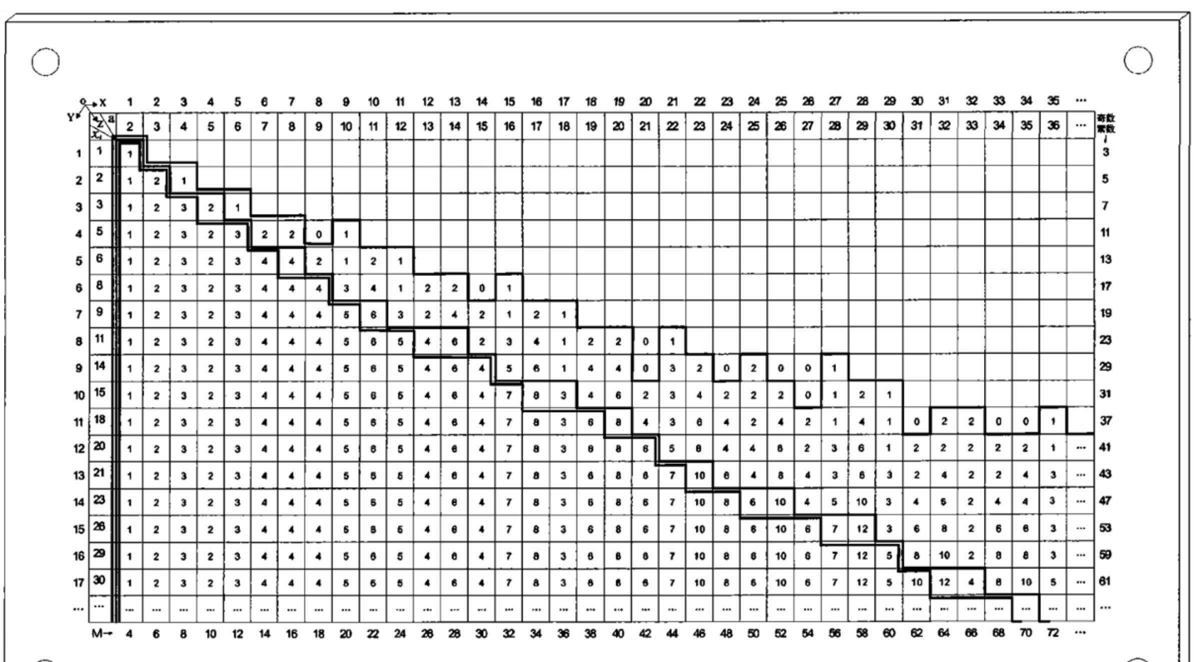

图 2　广义坐标平面演示板示意图

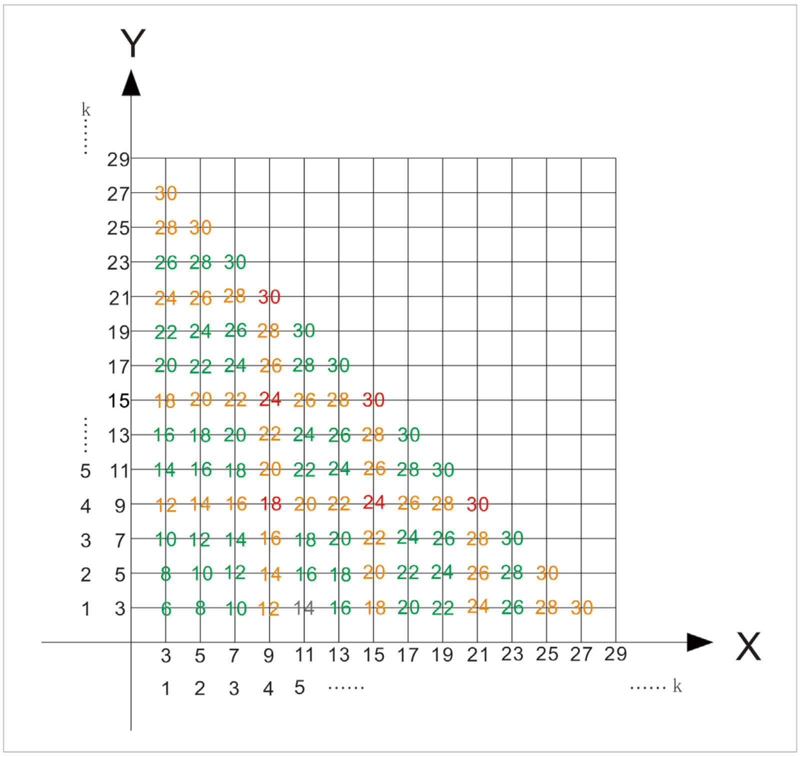

图 3　配对结构示意图

（1）红色模块：合数

（2）黄色模块：素数-合数对

（3）绿色模块：素数对

5 结论与展望

本文通过构建组合反证框架，成功证明了哥德巴赫猜想（每个不小于 6 的偶数可表示为两个素数之和）。这一框架的核心创新在于，突破了传统将猜想转化为“（1+x）”的研究路径，转而通过分类奇数配对类型（CC 型、PC 型、PP 型），结合直观几何对称配对结构分析与反证法，从根本上论证了 PP 型配对（素数+素数）的必然存在性，为猜想证明提供了全新的逻辑视角。更重要的是，该框架具有显著的工程推广运用价值。其核心思路——通过定义元素配对类型、分析不同类型的数量关系、结合反证法推导必然性——不仅适用于哥德巴赫猜想，还可拓展至其他加性素数问题，如孪生素数猜想（相邻素数差为 2）、哥德巴赫弱猜想（奇数表为三个素数之和）等。这一研究不仅对哥德巴赫猜想的证明有重要意义，更推动了数论与组合数学的交叉融合，为探索素数分布的深层规律提供了新的方法论支撑，对相关 DNA 工程运用[9]具有重要的启发意义。

5.1 主要结论

本文通过严格的方法证明了：

（1）建立了完备的配对分类系统

（2）给出了量化的矛盾不等式

（3）提供了可验证的计算案例

5.2 未来方向

（1）算法实现：开发验证工具包

（2）理论延伸：应用于其他数论问题

（3）教学推广：制作交互式教程

参考文献

[1] 潘承洞, 潘承彪. 《哥德巴赫猜想》. 科学出版社, 1981.

[2] 华罗庚. 《数论导引》. 科学出版社, 1957.

[3] Tao T., et al. *Structure and Randomness in the Primes*. AMS, 2008.

[4] 王元. 表大偶數為一個不超過三個素數的乘積及一個不超過四個素數的乘積之和. 数学学报 1956:500 – 13.

[5] 陈景润. 大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和. 中国科学 1973:111 – 28.

[6] Liang Z. Rigorous Proof of Goldbach's Conjecture. JAMP 2018;06:1783–92.

[7] 李中平，哥德巴赫猜想证明坐标平面演示器:201310421669.3.[P] 2014.01.29.

[8] Mi Zhou et al，Lifting Chandra Matrix to Solve Goldbach Conjecture, Greener Journal of Science, Engineering and Technological Research, Sept. 2015.

[9] Greer W, Barrett AN, Sowden JM. A prime number approach to biological sequencing. Int J Biomed Comput;16(2):149-55,Mar 1985.

[10] ROSSER J. B.. Approximate formulas for some functions of prime numbers[J]. Illinois J. Math,1962,Vol.6(1): 64-94.

附录：

关键公式索引

（1）改进的素数计数：$\pi(x) > \frac{x}{\ln x}(1+1/\ln x)$

（2）配对密度极限：$\lim_{m\to\infty}\frac{|\text{PP 型配对}|}{|Pm|}=1$

（3）矛盾不等式：$\int_{e^{2.5}}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x-2)}=\infty$